

Реферат

Магістерська дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, загального висновку, списку використання літератури і додатків. Дисертація містить 110 сторінок основного тексту, 46 ілюстрацій, 21 таблицю, 2 додатки та 57 джерел за переліком посилань. Загальний обсяг роботи – 130 сторінок.

Актуальність теми. Існуючі на цей час технології передачі інформації не досконалі, а об'єм інформації, що потребує передачі, лише збільшується. Саме тому актуальною залишається тема збільшення швидкості передачі інформації шляхом використання аподизованих голограм для фізичної реалізації оптичних сингулярностей.

Мета: збільшення швидкості передачі інформації шляхом використання аподизованих голограм для фізичної реалізації оптичних сингулярностей.

Задачі:

1. Порівняльний аналіз існуючих математичних методів та способів фізичної реалізації оптичних сингулярностей;
2. Обґрунтування використання аподизованої синтезованої голограми для реалізації оптичної сингулярності.
3. Аналіз отриманих результатів та формулювання напрямків реалізації для їх покращення.

Об'єкт дослідження: передача інформації завдяки оптичній сингулярності.

Предмет дослідження: метод і фізичний засіб для реалізації оптичних сингулярностей.

Методи дослідження. Для вирішення поставлених задач в роботі використовуються: параксіальне наближення для опису лазерного випромінювання; розрахунки пучків Ерміта-Гаусса і Лагерра-Гаусса; комп'ютерне моделювання математичної моделі, що пропонується.

Наукова новизна одержаних результатів:

1. Запропоновано нову математичну модель для оптичних сингулярностей.
2. Запропоновано використання аподизованих синтезованих голограм для фізичної реалізації оптичних сингулярностей.

Практичне значення одержаних результатів: збільшення якості зображення і об'єму інформації, що кодується, спрощена експлуатація установки і в не лабораторних умовах.

Апробація результатів дисертації:

1. Бобер О.Ю. Математичне моделювання оптичних сингулярностей/ VII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта» – Луцьк – 2018р.
2. Богатирьова Г.В., Бобер О.Ю. Математичне моделювання та фізична реалізація оптичних сингулярностей/ VI Науково-практична конференція студентів та аспірантів "Погляд у майбутнє приладобудування" – Київ – 2018р.

Ключові слова: сингулярна оптика, математичне моделювання, фазова сингулярність, дифракція, поляризація, голографія, аподизовані синтезовані голограми.

Abstract

The master's dissertation paper consists of an introduction, four sections, a general conclusion, a list of the use of literature and applications. The thesis contains 110 pages of the main text, 46 illustrations, 21 tables, 2 annexes and 57 sources according to the list of references. Total amount of work - 130 pages.

Actuality of theme. Existing information technologies are not perfect at present, and the amount of information that needs to be transmitted is increasing. That is why the topic of increasing the speed of information transmission by using apodized holograms for the physical realization of optical singularities remains relevant.

Purpose: to increase the speed of information transmission by using apodized holograms for the physical realization of optical singularities.

Tasks:

1. Comparative analysis of existing mathematical methods and methods of physical realization of optical singularities;
2. The justification of the use of apodized synthesized hologram for the implementation of optical singularity.
3. Analysis of the results and formulation of the implementation directions for their improvement.

Object of research: information transmission due to optical singularity.

Subject of research: method and physical means for realization of optical singularities.

Research methods. To solve the problems in the work we use: paraccical approximation for the description of laser radiation; calculations of the Hermite-Gauss and Lagerra-Gauss beams; Computer simulation of the offered mathematical model.

Scientific novelty of the obtained results:

1. A new mathematical model for optical singularities is proposed.
2. The use of apodized synthesized holograms for the physical realization of optical singularities is proposed.

The practical value of the results obtained: an increase in the image quality and the amount of encoded information, simplified operation of the installation and in non-laboratory conditions.

Testing the results of the dissertation:

1. Bob O.Yu. Mathematical modeling of optical singularities / VII International scientific and practical conference "Mathematics. Information Technology. Education »- Lutsk - 2018
2. Bogatyreva G.V., Bober O.Yu. Mathematical modeling and physical implementation of optical singularities / VI Scientific and practical conference of students and postgraduates "A Look at the Future of Instrumentation" - Kyiv - 2018.

Key words: singular optics, mathematical modeling, phase singularity, diffraction, polarization, holography, apodized synthesized holograms.

Зміст

Перелік умовних позначень.....	9
Вступ.....	10
Розділ 1. Огляд літератури.....	12
1.1 Теоретичне поняття сингулярної оптики.....	12
1.2 Методи експериментальної реалізації спіральних пучків.....	17
1.3 Оптичний пінцет.....	20
1.4 Тривимірна локалізація випромінювачів.....	21
Висновок.....	23
Розділ 2. Спіральні пучки світла.....	24
2.1 Спіральні лазерні пучки.....	24
2.1.1 Світлові поля, що обертаються при поширенні.....	24
2.1.2 Порядок зростання і структурний вид рішень.....	26
2.1.3. Основні рівняння і параметри рішень.....	28
2.1.4. Спіральні пучки і їх квантовомеханічні аналоги.....	29
2.1.5. Експериментальна реалізація спіральних пучків.....	37
2.2 Спіральні пучки із заданим розподілом інтенсивності.....	44
2.2.1. Пучки в формі плоских кривих.....	44
2.2.2. Властивості пучків у вигляді замкнутих кривих.....	52
2.2.3. Методи синтезу структурно-стійких пучків із заданим розподілом інтенсивності.....	61
2.2.4. Синтез фазових елементів для фокусування в криві.....	68
2.3. Інтегральні характеристики спіральних пучків.....	71
Висновок.....	74
Розділ 3. Формування сингулярних пучків за допомогою синтезованих аподизованих голограм.....	76
3.1. Синтез голограм.....	76
3.2 Дифракційні методи діагностики сингулярностей.....	79
3.2.1 Дифракційного методу діагностики фазових сингулярностей в оптичних пучках, який базується на юнгівській моделі дифракції.....	79

3.2.2 Дифракційний метод діагностики фазових сингулярностей.....	84
3.2.3 Результати з формування та дифракційної діагностики комбінованих пучків.....	89
3.3. Експериментальне дослідження поляризаційні сингулярності.....	94
Висновок.....	101
Розділ 4 Розробка стартап-проекту «HOLO VS».....	104
4.1 Опис ідеї проекту.....	104
4.2 Технологічний аудит ідеї проекту.....	106
4.3 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту.....	106
4.4 Розроблення ринкової стратегії проекту.....	111
4.5 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту.....	113
Висновок.....	115
Загальні висновки.....	117
Список використаної літератури.....	119
Додатки.....	123

Перелік умовних позначень

ДОО - дифракційні оптичні елементи;

ДЛ - дифракційна лінза;

ДА - дифракційна асферика;

КДХ - крайова дифракційної хвилі;

ЛГ - Лагер-Гаусовий;

НЛТІС - нелокалізована темна інтерференційна смуга;

Вступ

Сингулярна оптика, як об'єкт досліджень, в даний час, викликає підвищений інтерес, чим пояснюється значна кількість публікацій присвячених зазначеним проблемам. Вивченню даної теми присвячені роботи авторів, які розглядають сингулярну оптику, як самостійну галузь оптики, що займаються теоретично и експериментально дослідженнями світлових полів з фазовими сингулярностями. Велика частина робіт по сингулярній оптиці ведеться в параксіальному наближенні, яке широко використовується в сучасних дослідженнях для опису лазерного випромінювання. З розвитком когерентної оптики з'явилися експериментальні и теоретичні роботи, що показують, що лазер може випромінювати світлові пучки, які самосогласованні таким чином, що зберігають свою структуру при поширенні и фокусуванні з точністю до масштабу.

Сьогодні аподизовані синтезовані голограми активно використовуються в офтальмології через їх велику точність і якість. Основною проблемою цих голограм являється сам процес математичного моделювання. В минулому, коли розрахункові можливості машин були не великі і займали багато часу, а відповідно і грошей, доцільність такого використання була сумнівною. Але сьогодення демонструє нам потужні ЕОМ, що суттєво зменшує витрати на математичне моделювання голограми, і відповідно зменшує затрати в часі і коштах витраченими виробником.

Мета дисертації обґрунтувати математичну модель і фізичну реалізацію оптичної сингулярності.

Така цільова спрямованість роботи зумовила необхідність розгляду наступних моментів: спіральні пучки світла, поняття сингулярної оптики, формування сингулярних пучків за допомогою аподизованих синтезованих голограм, експериментальне дослідження поляризаційної сингулярності.

Предметом дослідження є побудувати математичну модель і розробити фізичну реалізацію оптичної сингулярності і на основі неї реалізація синтезованої голографічної пластинки.

Теоретичною і методологічною основою дослідження послужили праці вітчизняних і зарубіжних вчених в області експериментальної і теоретичної фізики, оптики, матеріали науково-практичних конференцій, монографії та публікації в періодичній пресі, статистична інформація.

Орієнтовна наукова новизна результатів дослідження полягає в постановці, теоретичному і прикладному обґрунтуванні та вирішенні комплексу питань, пов'язаних з подальшим розвитком основ оптичної сингулярності.

Практична значимість магістерської дисертації полягає в розробці конкретних рекомендацій щодо впровадження та застосування аподизованої синтезованої голограм для отримання оптичних сингулярностей.

Актуальністю даної магістерської роботи є те, що при використанні оптичної сингулярності в сьогоденні втрачають низку гіпотетичних переваг, а саме можливість реалізації аподизованих синтезованих голограм, що, в свою чергу, дає такі гіпотетичні переваги, як: збільшення якості зображення, спрощена експлуатація установки і в не лабораторних умовах, і можливого об'єму кодування інформації. Саме це і намагаються виправити більшість сучасних науковців. До чого і в цій роботі намагатимемось долучитись.

Розділ 1. Огляд літератури

1.1 Теоретичне поняття сингулярної оптики

Сингулярна оптика, що почалася з епізодичних публікацій в 70-ті роки минулого століття і пройшовши період становлення в 80-і роки, до теперішнього часу повністю оформилася як самостійна галузь оптики, що займається теоретичним і експериментальним дослідженням світлових полів з фазовими сингулярностями. Вивчення таких полів при поширенні в різних середовищах, способів їх перетворення, можливостей формування сингулярних світлових полів з апіорно заданими властивостями, а також прикладні аспекти, пов'язані, наприклад, з конструюванням дифракційних оптичних елементів (ДОЕ), мають велике значення як в науковому плані, так і в плані застосування в сучасних технологіях. Новий імпульс розвитку цей напрямок оптики отримало після виявлення взаємозв'язку між кутовим моментом світлових полів і наявністю у них фазових сингулярностей.

Велика частина робіт по сингулярній оптиці ведеться в параксіальному наближенні, яке широко використовується в сучасних дослідженнях, оскільки є гарною моделлю для опису лазерного випромінювання. З розвитком когерентної оптики з'явилися експериментальні і теоретичні роботи, що показують, що лазер може випромінювати світлові пучки, які самосогласованні таким чином, що зберігають свою структуру при поширенні і фокусуванні з точністю до масштабу. Такі пучки є модами лазерних резонаторів, мають жорстко задану форму і описуються двома родинами спеціальних функцій з різними типами симетрії: пучки Ерміта-Гаусса і Лагерра-Гаусса (рис.1.1). Найпростішим представником обох сімейств є гаусів пучок, тому пучки, побудовані на його основі, часто називають узагальненими гауссовими пучками. При поширенні у вільному просторі і фокусуванні таких пучків змінюються тільки розміри поперечного розподілу інтенсивності, а форма інтенсивності залишається постійною.

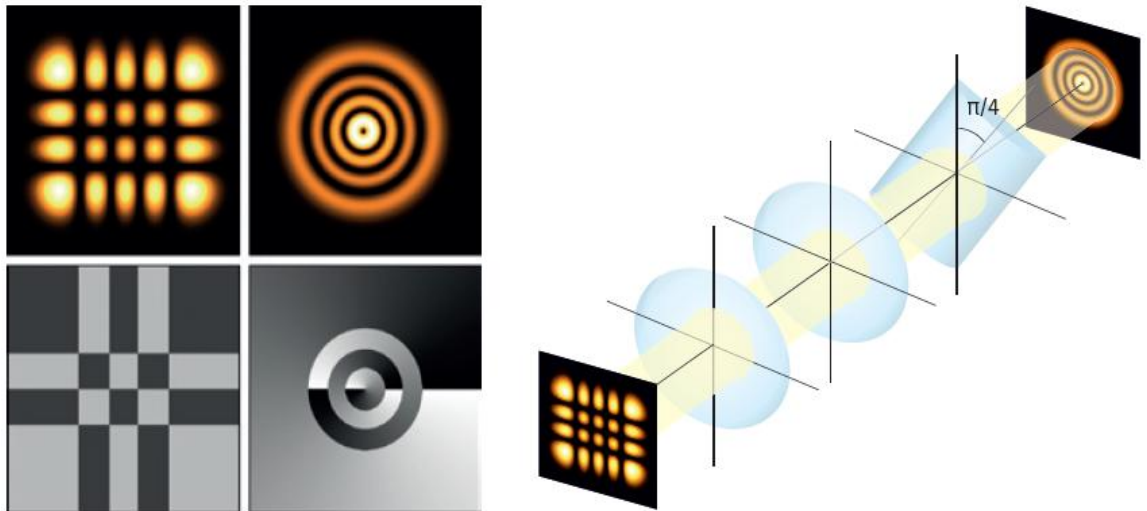


Рисунок 1.1 Інтенсивність і фаза пучків Ерміта-Гаусса HG4,3 і Лагерра-Гаусса LG3,1, а також оптична схема (модовий конвертер), яка перетворює пучки Ерміта-Гаусса в пучки Лагерра-Гаусса.

Набір сферичних і циліндричних лінз зі спеціально підібраними фокусною відстанню (модовий конвертор) дозволяє перетворити пучки Ерміта-Гаусса в пучки Лагерра-Гаусса [1]. Значно розширити сімейство розглянутих пучків вдалося, коли задумалися про побудову таких світлових полів, розподіл інтенсивності яких буде не тільки змінюватися в масштабі, а й повертатися. Форма зображення в поперечній площині при цьому як і раніше буде зберігатися. Такі поля називають "що обертаються" або "спіральними". Назва "спіральні пучки світла" підкреслює спіралевидний характер зміни світлового поля при поширенні у вільному просторі.

При цьому нижчий тип коливань в цих сімействах однаковий і є відомою двовимірною функцією Гауса. Збереження структури таких пучків при поширенні і фокусуванні можливо асоціювати з одновимірними деформаціями розтягнення-стиснення - збіжні та розбіжні пучки. Закономірно поставити питання: чи є якась оптична аналогія деформації кручення для пучків з неоднорідною розбіжністю чи складним розподілом фази? Дійсно, така аналогія виправдана через вихровий характер векторного поля потоку світлової енергії. Оскільки поле змінюється при поширенні,

постановкою задачі є його відновлення по інтенсивності та похідної інтенсивності уздовж напрямку поширення. Порівняльний аналіз цієї задачі для двовимірного та одновимірного полів показав радикальну відмінність цих двох випадків.

Перші опубліковані праці з обертанням світлових полів відносяться до 1993 року. В роботі [2] проблема існування полів що обертаються теоретично досліджена в загальній постановці: були отримані властивості спіральних пучків, що характеризують їх поширення (масштаб, швидкість повороту, фазовий зсув), і знайдено розкладання комплексної амплітуди таких пучків по модам Лагерра-Гаусса. У наступні роки розробка теорії світлових полів що обертаються тривала. Крім того, були запропоновані різні варіанти оптичних схем для експериментальної реалізації світлових полів що обертаються [3].

Виявилось, що для двовимірного світлового поля задача зводиться до відновлення векторного поля потоку світлової енергії по його дивергенції й ротору (відома задача Гельмгольца [4]). Таким чином, поле потоку світлової енергії має в загальному випадку вихровий характер, при цьому найбільш яскраво вихрова природа потоку проявляється навколо точок нульової амплітуди, котрі отримали назву оптичних вихорів. Характерно, що ротор вектору потоку світлової енергії, подібно до самої енергії поля, підкоряється закону збереження: інтеграл від проекції ротора на напрям розповсюдження дорівнює нулю в будь-якій площині в зоні Френеля. В [5] також показано, що вихрову складову не вдається знайти із вимірювань інтенсивності і її похідної та, відповідно, відновити вихідне поле. На якісному рівні це можливо пояснити наступним чином. Якщо в одновимірному випадку ненульовий градієнт фази завжди викликає локальні зміни інтенсивності при поширенні (енергія виходить або вправо, або вліво), то в двовимірному випадку через вихрову складову можлива циркулярна енергія, і у вигляді локальної зміни інтенсивності це може і не проявитись. На користь цього говорить і той факт, що двовимірне поле без вихрової складової, наприклад

поле радіально-симетричного вигляду, при зміні інтенсивності відновлюється. Зміну таких полів при розповсюдженні можливо асоціювати в деякому сенсі з деформацією розтягання (без кручення).

Параметри розповсюдження і різноманіття форм спіральних пучків моди Лагерра-Гаусса можна використовувати як базис для розкладання довільних параксіальних світлових пучків з кінцевою енергією. У формуванні спіральних пучків беруть участь тільки ті моди, індекси яких задовольняють умові:

$$2n + |m| + v_0 \cdot m = \text{const.} \quad (1.1)$$

Тут v_0 - параметр, який визначає швидкість повороту розподілу інтенсивності пучка:

$$v(z) = v_0 \cdot \arctg(z/z_R), \quad (1.2)$$

де z_R - довжина Релея.

Повний кут повороту розподілу інтенсивності пучка при еволюції у вільному просторі від площини перетяжки до площини Фур'є становить

$$v(+\infty) - v(0) = \pi v_0 / 2. \quad (1.3)$$

Якщо $v_0 = 0$, то при поширенні пучка розподіл інтенсивності не повертається. Окремими випадками таких полів є моди Лагерра-Гаусса і Ерміта-Гаусса.

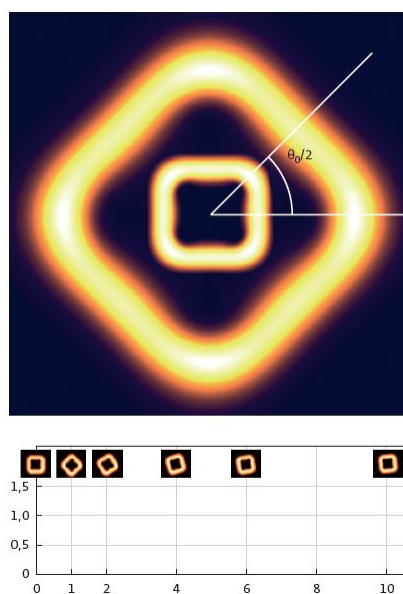


Рисунок 1.2. Еволюція розподілу інтенсивності спірального пучка у вільному просторі при поширенні пучка в зоні Френеля

Одним з найбільш цікавих випадків є вибір $v_0 = \pm 1$, оскільки він поєднує в собі простоту теоретичного уявлення і багато різноманітних можливостей для побудови спіральних пучків. Зокрема, можна вибрати такий варіант, що інтенсивність спірального пучка матиме вигляд деякої апріорно заданої плоскої кривої. На рис.1.2 показана інтенсивність спірального пучка в формі кордону квадрата. При поширенні такого пучка його інтенсивність повертається на $\pi / 2$ радіан.

Оптичні вихори - це нулі комплексної амплітуди світлового поля, де поширення фази має особливості. Вони носять назву дислокації хвильового фронту. Першим цей термін використали Дж. Ф. Най та М. Беррі [6], з геометричних міркувань, де зверталась увага на принципову відмінність між нулями комплексної амплітуди хвильового поля в одновимірному та двовимірному випадках. Сенса такої різниці полягає в наступному. Якщо для одновимірного поля геометрична кількість нулів дійсної та уявної частини комплексної амплітуди поля - це набір точок, то для двовимірного поля нулі дійсної та уявної частини - це лінії. Завдяки цьому поведінка ізольованих нулів амплітуди стає різною при малих змінах (зсувах) поля: в одновимірному випадку нульові точки дійсної та уявної частини легко "втрачають" одна одну та нуль амплітуди втрачається; в двовимірному полі нульові лінії дійсної та уявної частини деформуються, але точка їх перетину, тобто ізольований нуль амплітуди, залишається стійкою. Фаза поля не визначена в нулях його амплітуди, має в околі кожного нуля гвинтову структуру, а циркуляція градієнта фази навколо них кратна 2π . Такі ізольовані точки отримали назву дислокацій хвильового фронту, чи фазових сингулярностей. Знак дислокації хвильового фронту визначається знаком фазового набігу при обході навколо неї. В праці [7] вивчалась щільність і знак дислокації випадкового світлового поля (спекл-поля) і було показано, що в спекл-полі кількість дислокацій обох знаків приблизно однаково, а щільність дислокацій складає одну дислокацію на спекл (тобто характерний середній розмір неоднорідності поля).

1.2 Методи експериментальної реалізації спіральних пучків

Спіральні пучки були реалізовані експериментально декількома способами. Безпосередньо за допомогою амплітудно-фазових масок. Інший, менш очевидний метод синтезу таких пучків [3], заснований на узагальненні перетворення пучків Ерміта-Гаусса в пучки Лагерра-Гаусса і зводиться до синтезу одновимірного за структурою поля ("штрихкод"), яке перетворюється в оптичній системі, показаної на рис.1.3, 1.4.

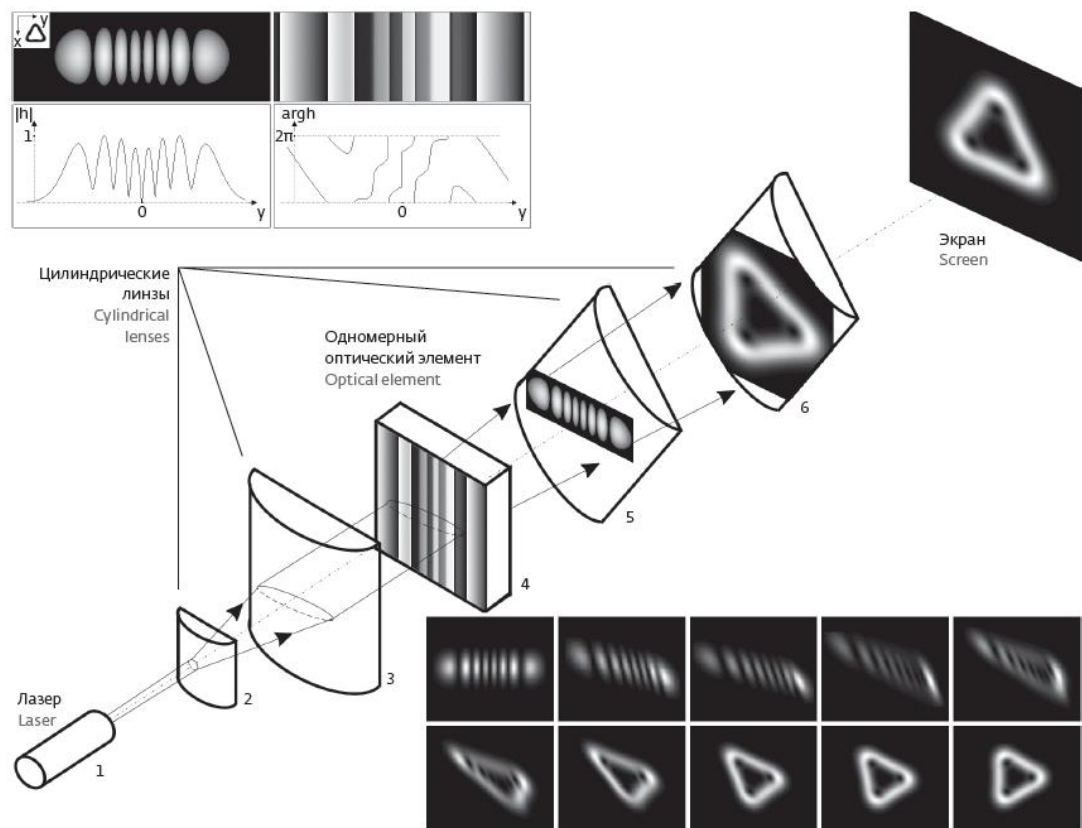


Рисунок 1.3. Оптична схема синтезу спіральних пучків за допомогою одновимірних за структурою оптичних елементів. В верхній частині малюнка показана структура амплітудно-фазового елемента для спірального пучка в формі межі трикутника. Напівтонові зображення представляють собою амплітуду і фазу розподілу; графіки відповідають амплітуді і фазі одновимірних розподілів. У нижній частині рисунка показана динаміка зміни світлового поля між лінзами 5,6. За лінзою 6 пучок форма розподілу інтенсивності зберігається, повертаючись при поширенні

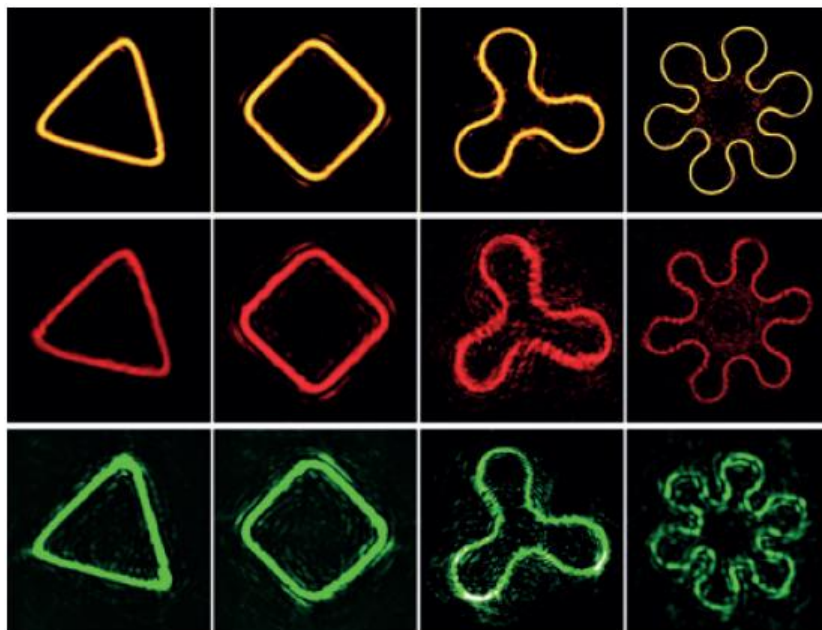


Рисунок 1.4. На основі теорії спіральних пучків були побудовані фазові елементи для фокусування лазерного випромінювання з високою ефективністю. Сформовані таким чином поля також є вихровими і володіють кутовим моментом. Показано розподіл інтенсивності полів, сформованих за допомогою фазових елементів, в площині фокусування. Верхній ряд - поля отримані чисельно, другий і третій – експериментально

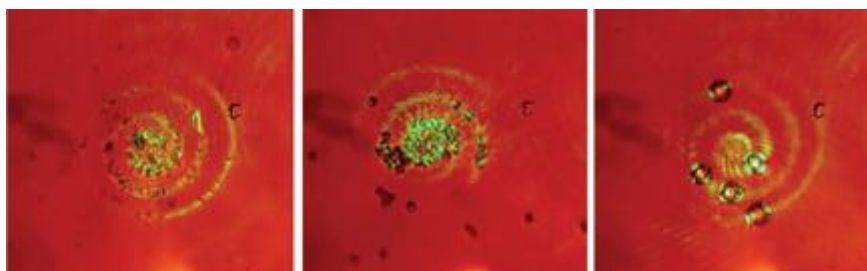


Рисунок 1.5. Переміщення частинок латексу уздовж заданої кривої під дією лазерного випромінювання. Частинки латексу мікронних розмірів (0,46 мкм, 1,2 мкм і 3,2 мкм) висвітлюються жорстко сфокусованим спіральним пучком в формі спіралі Архімеда. Залежно від знака параметра обертання пучок працює як пилосос (збирає частинки в центрі), або як вентилятор (очищаючи центр)

Ці пучки виявилися корисні для створення високоефективних дифракційних фазових елементів, що дозволяють отримати в площині фокусування розподіл інтенсивності у вигляді апріорно заданої плоскої кривої (рис. 1.5). На основі теорії спіральних пучків можуть бути побудовані фазові елементи для фокусування лазерного випромінювання з високою ефективністю (розроблений чисельний алгоритм). Сформовані таким чином поля також є вихровими і володіють кутовим моментом.

В [8] було запропоновано метод комп'ютерно синтезованих голограм. Така голограма є звичайною фазовою або амплітудною решіткою з вираженим точковим дефектом у вигляді "вилки". Світло, що падає на таку голограму дифрагує, утворюючи дифракційні порядки пучків, що переносять оптичні вихори. Перший і мінус перший порядки дифракції переносять позитивні і негативні оптичні вихори, відповідно, з топологічним зарядом рівним індексу дефекту дифракційної решітки. Типові голограми з індексом дефекту з $p = 1$, і $p = 8$ наведені на Рис.1.6 а. і Рис.1.6 в. відповідно.

Наприклад, розподіл інтенсивності в першому порядку дифракції в пучку Лагерра-Гаусса з індексом $m = 0$ має вигляд, наведений на Рис. 1.6 б. і Рис. 1.6 г, для голограм з індексом дефектів $p = 1$ і $p = 8$ відповідно.

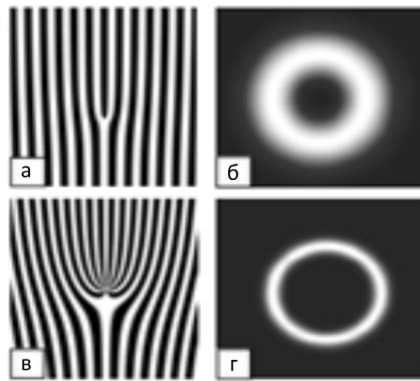


Рисунок 1.6. Голограма оптичного вихору і дифракційна картина першого дифракційного порядку на голограмі. а) голограма $p = 1$, б) вихор $l = 1$; в) голограма $p = 8$, г) вихор $l = 8$

Щоб експериментально виявити наявність вихору і величину та знак топологічного заряду, необхідно накласти на сингулярний пучок звичайний гаусів пучок, або пучок, що не переносить сингулярність. Якщо осі предметного і опорного пучків складають деякий кут, то в інтерференційній картині з'являється характерна "вилка" (Рис. 1.7 а.) Якщо предметний і опорний пучок поширюються в одному напрямку, але мають різну кривизну хвильового фронту, то інтерференційна картина має вигляд інтерференційної спіралі (Рис. 1.7 б.). Число гілок спіралі одно топологічному заряду вихору, а напрямок закрутки, як правило, визначає знак топологічного заряду. Цей

метод дозволяє формувати "чисті сингулярні пучки", які переносять оптичні вихори зі строго заданими дислокаціями хвильового фронту.

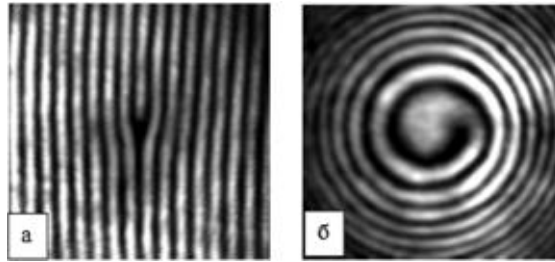


Рисунок 1.7. Експериментально спостережувані результати інтерференції оптичного вихору з $l = 1$ і опорного гладкого гауссова пучка. а) інтерференційна "вилка"; б) інтерференційна спіраль

Звертаючи увагу на вихрову складову векторного поля потоку світлової енергії, можна розширити поняття структурної стабільності й дослідити питання існування світлових полів, що зберігають форму інтенсивності при поширенні з точністю до масштабу і обертання.

1.3 Оптичний пінцет

Наявність кутового моменту у спіральних пучків надає можливість створення в області фокусування заданих розподілів інтенсивності і орбітального кутового моменту (ОУМ), що представляє зручний інструмент для безконтактного маніпулювання мікрооб'єктами в електроніці та мікробіології.

Експеримент, що дозволяє продемонструвати можливість передачі ОУМ від світлового пучка матеріального тіла, був проведений в 1995 році на основі так званого оптичного пінцета. Оптичні пінцети використовують жорстко сфокусовані пучки світла для захоплення мікроскопічних часток в трьох вимірах всередині навколишнього їх рідини. Маніпуляція мікроскопічними об'єктами з допомогою оптичних пінцетів в даний час перетворилася в індустрію комерційного виробництва просторових модуляторів світла, які здатні генерувати оптичні пастки довільної форми.

Здатність спіральних пучків зберігати форму розподілу інтенсивності при поширенні пучка виявилася корисною і при вирішенні інших завдань. У 2014 році Нобелівська премія з хімії була присуджена Е. Ерік Бетциг, Ш. Хеллі і У. Мернер "за розвиток методів флуоресцентної мікроскопії надвисокої роздільної здатності" [9]. Один з цих методів, який дозволяє подолати класичний дифракційну межу і визначити просторові координати випромінювачів, заснований на використанні спіральних пучків [10].

1.4 Тривимірна локалізація випромінювачів

У завданнях оптичної мікроскопії джерелом світла є люмінесцентні молекули, розміри яких набагато менше довжини хвилі. Можливість спостереження таких частинок за допомогою оптики котра фокусує обмежена дифракційною межею: приблизно рівним довжині хвилі реєстрованого зображення.

Апроксимація зареєстрованого зображення гаусовим пучком дозволяє отримати тільки поперечні координати точкового джерела, третя координата - глибина залягання джерела в плівці - залишається невідомою. Крім того, якщо плівка досить товста, то на детектор потрапляє розбіжний світловий пучок, і відновити координати з прийнятною точністю вже неможливо. Вирішення цього завдання було запропоновано колективом співробітників, в який входить нобелівський лауреат 2014 року Мернер. Випромінювання джерела можна перетворити за допомогою фазової маски в двухлепесткових зображеннях, розподіл інтенсивності якого буде повертатися в поперечній площині по мірі руху джерела. Реєструючи за допомогою двовимірного детектора ці зображення, за кутом повороту розподілу інтенсивності можна визначити глибину залягання точкового джерела в плівці. З'являється можливість визначити просторове положення молекул в тонкій плівці і подивитися спектр кожної з цих молекул (рис.1.8). Все це можна зробити за

допомогою спіральних пучків, кут повороту розподілу інтенсивності яких при поширенні пучка досить великий (наприклад, π радіан) [11].

Існування світлових полів, розподіл інтенсивності яких повертається на кут більше прямого - саме по собі незвично (рис. 1.9). Поворот розподілу інтенсивності на прямий кут ми можемо собі пояснити за допомогою геометричної оптики. Але можна уявити собі, принаймні за допомогою математики, пучки, в яких цей поворот більше, ніж $\pi / 2$ (наприклад, π). Такий поворот нез'ясовний з точки зору геометричної оптики, він є більш складним і відбувається за рахунок інтерференції певних областей між собою. Цей результат представляє інтерес не тільки з прикладної, але і з фундаментальної точки зору.

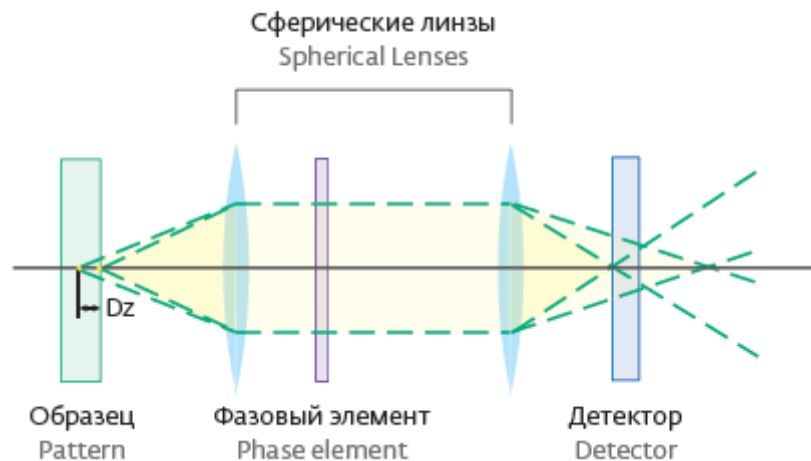


Рисунок 1.8. Принципова схема оптичної системи для визначення положення джерела. Випромінювання частки, що знаходиться на відстані Dz від поверхні зразка, перетворюється за допомогою фазового елемента в полі, за розподілом інтенсивності якого можна судити про глибину залягання частки. Якщо фазовий елемент розрахований на основі спіральних пучків, то зміщення частинки буде приводити до повороту розподілу інтенсивності поля в площині реєстрації

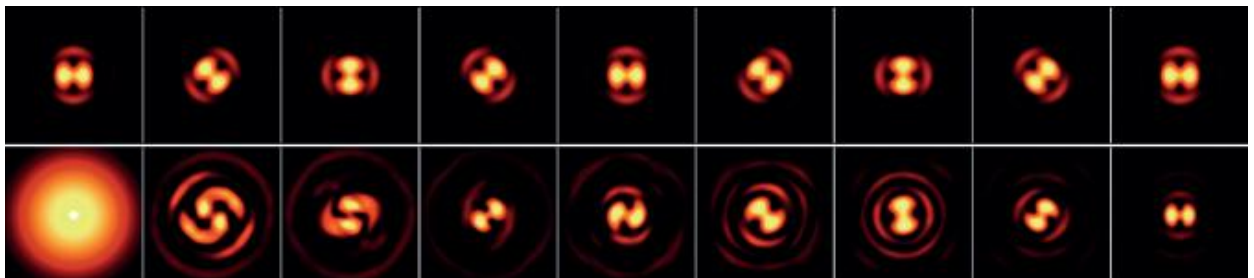


Рисунок 1.9. Еволюція розподілу інтенсивності спірального пучка і пучка, сформованого за допомогою фазового елемента, при поширенні в зоні Френеля

Висновки

Для фізичної реалізації мною запропоновано використання аподизованих синтезованих голограм. Це голограми, що мають властивості, аналогічні оптичним отриманими голограмами, можна виготовити за допомогою ЕОМ(електронно обчислювальна машина)[12]. Машинний метод отримання голограм дозволяє досліджувати деякі голографічні явища шляхом їх математичного моделювання. При відновленні синтезованих голограм звичайними методами отримують оптичні хвилі, які реально не існують, наприклад, з їх допомогою можна візуалізувати розраховані на ЕОМ двовимірні і тривимірні математичні функції. Зауважу, що використання саме аподизованих синтезованих голограм відрізняється від фазових та бінарних голограм тим, що формується лише перші порядки дифракції, що несуть «правильну» сингулярність.

Сьогодні аподизовані синтезовані голограми активно використовуються в офтальмології через їх велику точність і якість. Основною проблемою цих голограм являється сам процес математичного моделювання. В минулому, коли розрахункові можливості машин були не великі і займали багато часу, а відповідно і грошей. Доцільність такого використання була сумнівною. Але сьогодні демонструє нам потужні ЕОМ, що суттєво зменшує витрати на математичне моделювання голограми, і відповідно зменшує затрати в часі і коштах витраченими виробником.

Розділ 2. Спіральні пучки світла

2.1 Спіральні лазерні пучки

2.1.1 Світлові поля, що обертаються при поширенні

Нехай когерентне світлове поле з довжиною хвилі λ задано своєю комплексною амплітудою $F(x, y, l)$. Будемо розглядати задачу пошуку структурно-стійких світлових полів в параксіальній наближенні, тобто в припущенні, що при поширенні зміна поля $F(x, y, l)$ уздовж x, y значно слабкіше, ніж уздовж l . У цьому випадку змінна l називається змінною поширення і еволюція поля описується параболічним рівнянням.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial l} = 0, \quad (1)$$

де $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число. Наприклад, для гелій-неонового лазера $\lambda = 0,63$ мкм і, отже, $k \sim 10^7$ м⁻¹.

Відомо [13, 14], що, рішення параболічного рівняння з початковою умовою $F(x, y, 0) = F_0(x, y)$ має вигляд

$$F(x, y, l) = \frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbf{R}^2} \exp \left\{ \frac{ik}{2l} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} \times F_0(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2)$$

Тут інтеграл в правій частині називається перетворенням Френеля від функції $F_0(\xi, \eta)$. Зворотне до (2) перетворення також є френелівським:

$$F_0(\xi, \eta) = -\frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbf{R}^2} \exp \left\{ -\frac{ik}{2l} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} \times F(x, y, l) dx dy.$$

Якщо використовувати інтегральний оператор Френеля, то рівність (2) набуде вигляду $F(x, y, l) = \mathbf{FR}_l[F_0(\xi, \eta)]$, а зворотне перетворення – $F_0(\xi, \eta) = \mathbf{FR}_{-l}[F(x, y, l)]$. Обидві формули є окремими випадками більш загальної рівності, що зв'язує комплексно значною розподілу світлового поля F в площинах l_1 і l_2 :

$$F(x, y, l_2) = \mathbf{FR}_{l_2-l_1}[F(\xi, \eta, l_1)]. \quad (3)$$

Умова структурної стійкості інтенсивності світлового поля, що обертається при поширенні може бути задано наступним чином: \

$$I(x, y, l) = D(l)I_0 \left(\frac{x \cos \theta(l) - y \sin \theta(l)}{d(l)}, \frac{x \sin \theta(l) + y \cos \theta(l)}{d(l)} \right), \quad (4)$$

де $\theta(l)$ - залежність кута повороту розподілу інтенсивності при поширенні поля $F(x, y, l)$, $d(l) > 0$ - масштабна зміна інтенсивності.

Завдання пошуку структурно-стійких світлових полів $F(x, y, l)$, інтенсивність яких при поширенні може тільки обертатися або змінюватися в масштабі, вимагає також знаходження функцій $d(l)$ і $\theta(l)$, що характеризують поведінку $I(x, y, l)$ при зміні l .

Відправною точкою при вирішенні поставленого завдання буде речова форма запису рівняння (1). У термінах інтенсивності $I(x, y, l)$ і фази $\varphi(x, y, l)$ це рівняння еквівалентно системі

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(I \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + k \frac{\partial I}{\partial l} = 0, \\ 2I \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right)^2 - \\ - 4I^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + 2k \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right] = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Підставляючи вираз для інтенсивності (4) в перше рівняння цієї системи, перепишемо його в змінних X, Y, l , то структурно-стійке світлове поле $F(x, y, l)$ набуде вигляду

$$F(x, y, l) = \frac{1}{d(l)} \sqrt{I_0(X, Y)} \times \exp \left[\frac{1}{2} i k d(l) d'(l) (X^2 + Y^2) + i \varphi_0(X, Y, l) \right], \quad (6)$$

а система (5) в змінних X, Y, l і функціях I_0, φ_0 запишеться як

$$\begin{cases} \nabla(I_0 \nabla \varphi_0) + k d^2(l) \theta'(l) \left(X \frac{\partial I_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial I_0}{\partial X} \right) = 0, \\ |\nabla \varphi_0|^2 + k^2 d^3(l) d''(l) (X^2 + Y^2) + 2k d^2(l) \frac{\partial \varphi_0}{\partial l} + \\ + 2k d^2(l) \theta'(l) \left(X \frac{\partial \varphi_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial \varphi_0}{\partial X} \right) - \\ - \frac{1}{2I_0} \left(\nabla^2 I_0 - \frac{|\nabla I_0|^2}{2I_0} \right) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Та обставина, що фаза φ_0 , на відміну від інтенсивності I_0 , залежить від

усіх трьох змінних X, Y, l , не дає можливості спростити нелінійну систему (7) і перетворює пошук її рішень в надзвичайно важке завдання. Однак якщо використовувати додаткове припущення про асимптотичну поведінку інтенсивності при великих $x^2 + y^2$, то застосування комплексного аналізу (а саме тих результатів, які пов'язують властивості функцій з властивостями їх фур'є-перетворень) дозволяє довести рішення задачі до конкретних аналітичних виразів.

2.1.2 Порядок зростання і структурний вид рішень

Для визначення виду рішень істотно наступне твердження. Нехай $F(x, y, l)$ - рішення параболічного рівняння (1), структурно-стійке в сенсі (4). Нехай для всіх $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ інтенсивність на площині $l = 0$ задовольняє нерівності

$$I(x, y, 0) \leq C \exp \left[-A(|x|^\alpha + |y|^\alpha) \right] \quad (8)$$

при деяких $A > 0, C > 0, \alpha \geq 2$. Тоді аналітичне продовження по змінним x, y функції $F(x, y, l) \in \mathbf{C}$ є ціла функція другого порядку росту і $\alpha = 2$. Зокрема, не існує структурно-стійких светових полів, інтенсивність яких убиває швидше гаусової функції.

Для доказу перепишемо інтегральне перетворення Френеля (3) наступним чином:

$$F(x, y, l_2) = \frac{k}{2\pi i(l_2 - l_1)} \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2(l_2 - l_1)} \right] \times \iint_{\mathbf{R}^2} \exp \left[-\frac{ik(x\xi + y\eta)}{l_2 - l_1} \right] \times \\ \times \exp \left[\frac{ik(\xi^2 + \eta^2)}{2(l_2 - l_1)} \right] F(\xi, \eta, l_1) d\xi d\eta$$

Це дозволяє розглядати функції $F(x, y, l_1), F(x, y, l_2)$ для будь-яких l_1, l_2 як вихідне поле і його перетворення Фур'є з деяким чисто фазовим множником, і навпаки. Як показано в [15], якщо $f(z, w)$ - ціла функція двох комплексних змінних, задовольняє при деяких $C > 0, A > 0, \alpha > 0$ рівності

$$|f(x, y)| \leq C \exp [-A(|x|^\alpha + |y|^\alpha)] \quad (9)$$

для всіх $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, то $\rho_f \geq \alpha$.

Умова структурної стійкості рішення $F(x, y, l)$ параболічного рівняння призводить до того, що порядок зростання $F(x, y, l)$ повинен одночасно відповідати умовам $\alpha \leq \rho_F \leq \max(2, \alpha / (\alpha - 1))$. Оскільки, $\alpha \geq 2$, то $\alpha / (\alpha - 1) \leq 2$, і поле $F(x, y, l)$ є функція другого порядку зростання. Строга нерівність $\alpha > 2$ призводить до протиріччя $2 < \rho_F \leq 2$ і, таким чином, забороняє існування структурно-стійких рішень параболічного рівняння, інтенсивність яких убуває швидше гаусової функції.

Слід зазначити, що питання існування структурно-стійких полів, інтенсивність яких зменшується повільніше гаусової функції $\exp [-A(x^2 + y^2)]$, залишається відкритим, і все подальший виклад буде присвячено структурно-стійким рішенням параболічного рівняння, які описуються цілими функціями другого порядку зростання.

Можна показати [16, 17], що якщо $F(x, y, l)$ - рішення параболічного рівняння (1), що володіє структурної стійкістю і задовольняє нерівності (8), то в поданні (6) змінні X, Y, l поділяються і фаза $\varphi_0(X, Y, l)$ набирає вигляду

$$\varphi_0(X, Y, l) = \varphi_0(X, Y, 0) + \gamma(l) \quad (10)$$

де $\gamma(l)$ - деяка функція.

Таким чином, експоненціальне убування інтенсивності на нескінченності дозволяє виявити структуру фази $\varphi_0(X, Y, l)$ і конкретизувати вид представлення (6):

$$F(x, y, l) = \frac{1}{d(l)} F_0(X, Y) \times \exp \left[\frac{1}{2} i k d(l) d'(l) (X^2 + Y^2) + i \gamma(l) \right] \quad (11)$$

де $F_0(X, Y) = \sqrt{I_0(X, Y)} \exp [i \varphi_0(X, Y, 0)]$ - ціла функція другого порядку зростання. Тим самим структурна стійкість інтенсивності (4) тягне за собою структурну стійкість фази з точністю до дефокусування.

2.1.3. Основні рівняння і параметри рішень

В даному розділі будуть знайдені функції масштабування $d(l)$, обертання $\theta(l)$ і фазового набігу $\gamma(l)$, а також намічений шлях для знаходження функції $F_0(X, Y)$, яка відіграє визначальну роль в поданні (11) структурно-стійких рішень параболічного рівняння [16].

Уявлення (11) набуде вигляду

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} F_0(X, Y) \exp \left[\frac{2il}{k\rho^2} (X^2 + Y^2) - i\gamma_0 \arg \sigma \right] \quad (12)$$

Де $X + iY = (x + iy) \exp(i\theta_0 \arg \sigma)/\rho|\sigma|$ и $\sigma = 1 + 2il/k\rho^2$ - комплексний параметр, введений для більш компактної форми запису. Підставивши (12) в рівняння (1), отримаємо рівняння для функції $F_0(X, Y)$:

$$\nabla^2 F_0 + 4i\theta_0 \left(X \frac{\partial F_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial F_0}{\partial X} \right) - 4F_0(X^2 + Y^2 - \gamma_0) = 0 \quad (13)$$

При $\theta_0 = 0$ дане рівняння є стаціонарним рівнянням Шрьодінгера для гармонійного осцилятора, і його рішення добре відомі [18, 19]. Це функції Ерміта - Гаусса $F_0(X, Y) = H_{n,m}(X, Y)$, $\gamma_0 = n + m + 1$ и функції Лагерра - Гауса $F_0(X, Y) = Z_{n,\pm m}(X, Y)$, $\gamma_0 = 2n + m + 1$.

Будемо шукати рішення рівняння (13) у вигляді розкладання

$$F_0(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(X, Y) \quad (14)$$

яке завжди можливо завдяки нерівності (8) і повноти системи функцій $\{Z_{n,m}(X, Y), n, \pm m = 0, 1, \dots\}$ в просторі $L_2(\mathbf{R}^2)$ - Підставивши (14) в рівняння (13), отримаємо тотожність

$$\sum_{n,m} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(X, Y) (2n + |m| + \theta_0 m - \gamma_0 + 1) = 0$$

або, в силу повноти системи функцій Лагерра-Гаусса, нескінченний набір умов на коефіцієнти c_{nm} і числа n, m :

$$c_{nm} (2n + |m| + \theta_0 m - \gamma_0 + 1) = 0.$$

Якщо зафіксувати деяку пару (n_0, m_0) , то проблема пошуку $F_0(X, Y)$

зводиться до визначення цілих чисел n, m з рівняння

$$2n + |m| + \theta_0 m = 2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0 \quad (15)$$

У цій формулі n, n_0 - невід'ємні цілі числа, m, m_0 - цілі числа, θ_0 - дійсне число. При цьому $\gamma_0 = 2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0 + 1$ і коефіцієнти c_{nm} вибираються довільним чином для тих пар (n, m) , які задовольняють рівняння (15), і мали бути зацікавленими рівні нулю в іншому випадку.

Далі показана можливість розв'язання рівняння (15) для будь-якого θ_0 і знайдені відповідні рішення рівняння (13).

2.1.4. Спіральні пучки і їх квантовомеханічні аналоги

Позначимо $N(\theta_0)$ безліч всіх пар (n, m) , задовольняють рівняння (15). Повний опис безлічі $N(\theta_0)$ при різних θ_0 і визначення функцій $F_0(X, Y)$ зводиться до наступних п'яти випадків.

1. Якщо θ_0 - ірраціональне число, то безліч $N(\theta_0)$ складається з єдиної пари (n_0, m_0) . Використовуючи визначення функцій Лагерра-Гаусса, легко показати, що структурно-стійке поле $F(x, y, l)$ не залежить від θ_0 і представимо у вигляді

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp \left[\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2n_0 + |m_0| + 1) \arg \sigma \right] \times \mathcal{L}_{n_0, m_0} \left(\frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|} \right) \quad (16)$$

Відсутність залежності від θ_0 - це, звичайно ж, зворотна сторона радіально-симетричної форми інтенсивності поля (16), оскільки в даному випадку не має значення, яке обертання йому приписувати.

2. Якщо $\theta_0 = 0$, то $\theta(l) \equiv 0$ і відповідне поле $F(x, y, l)$ поширюється вздовж l без обертання. При цьому $N(0) = \{(n, m); 2n + |m| = N\}$, де $N = 0, 1$,

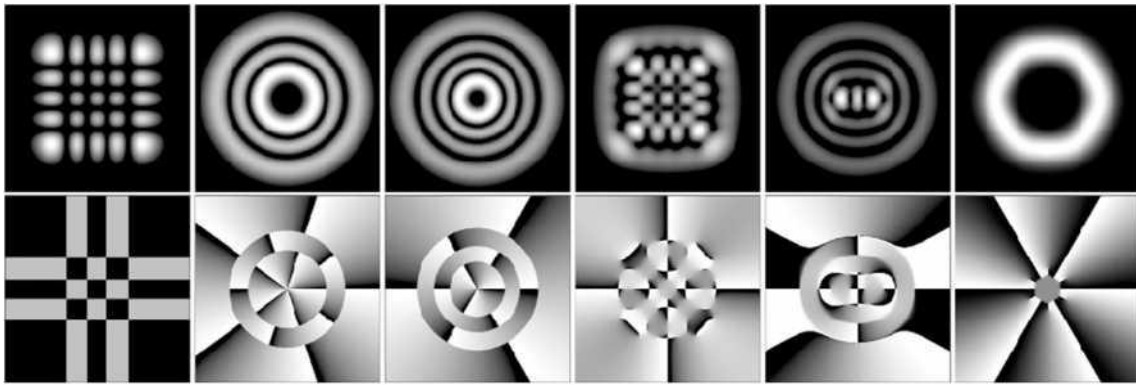


Рисунок 2. 1. Інтенсивності (верхній ряд) і фази (нижній ряд) структурно-стійких полів без обертання: (а) мода Ерміта Гаусса. $H_{4,4}(x, y)$; (б, в) моди Лагерра Гаусса $L_{2,5}(x, y)$ і $L_{3,3}(x, y)$; (г, д) моди Ерміта Лагерра Гаусса $G_{4,4}(x, y | \pi / 10)$ і $G_{5,3}(x, y | \pi / 5)$ (див. [20]); (е) поле виду (17) при $N = 8$ зі спеціальним підбором коефіцієнтів c_n , щоб його інтенсивність виглядала як правильний шестикутник. На всіх малюнках чорний колір відповідає нульовій інтенсивності і нульовій фазі, білий-максимальна інтенсивності і фазі 2π .

$$\gamma_0 = N + 1 \text{ и}$$

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp \left[\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(N + 1) \arg \sigma \right] \times \sum_{n=0}^N c_n \mathcal{L}_{\min(n, N-n), N-2n} \left(\frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|} \right), \quad (17)$$

де c_n - довільні константи. Отримане вираз показує, що без обертання в параксіальній наближенні можуть поширюватися, зберігаючи свою структуру, тільки поля, які в перетягуванні мають вигляд множення гаусової функції на деякий поліном спеціального виду. Більш того, $|F(x, y, l)| = |F(-x, -y, l)|$ тобто інтенсивність будь-якого структурно стійкого поля, ще не обертається, має центральну симетрію. На рисунку 2.1 показані приклади таких полів. Мода Ерміта-Гауса, зображена на рис. 2.1а, є речовій функцією, тому її фаза приймає тільки значення 0 і π . Горизонтальні і вертикальні прямі на фазовому розподілі моди Ерміта - Гауса показують місцерозташування нульових ліній: при перетині такої лінії відбувається стрибок фази на π . Моди Лагерра-Гауса мають і нульові лінії - окружності, і ізольований нуль в центрі координат.

Ізольовані нулі (точки фазового сингулярності) зручно класифікувати

за величиною набігу, який набуває фаза при обході навколо такого нуля проти годинникової стрілки. Якщо набіг фази позитивний, то будемо називати такий нуль нулем типу z , якщо від'ємний - нулем типу \hat{z} . Незважаючи на те, що така класифікація не відображає всього різноманіття можливостей (нульові лінії і уявною частин комплексної амплітуди можуть перетинатися і не під прямим кутом і бути дуже далекі за виглядом від лінійних функцій навіть в малій околиці нуля), вона дозволяє дати найпростішу характеристику поведінки фази в околиці кожного ізольованого нуля.

Для моди $L_{2,5}(x, y)$ точка фазового сингулярності - це нуль типу z п'ятого порядку: при обході навколо нього проти годинникової стрілки фаза змінюється від 0 до 2π п'ять разів. Для моди $L_{3,-3}(x, y)$ аналогічна точка в центрі координат - ізольований нуль типу \hat{z} третього порядку. Структурно-стійкі поля, показані на рис. 2.1 г-е, мають ізольованими нулями і типу z , і типу \hat{z} . Контрастні чорно-білі переходи на фазових розподілах відповідають склеюванню фаз $\varphi = 0$ і $\varphi = 2\pi$.

3. Нехай $\theta_0 = -1$. Тоді $2n + |m| - m \in$ парне невід'ємне число. Позначаючи його $2N$, знаходимо множину

$\mathcal{N}(-1) = \{(N, m); m = 0, 1, 2, \dots\} \cup \{(N + m, m); m = -1, -2, \dots, -N\}$
параметр фазового набігу $y_0 = 2N + 1$ і світлове поле

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp \left[\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2N + 1) \arg \sigma \right] \times \\ \times \left[\sum_{m=0}^{\infty} c_m \mathcal{L}_{N,m}(X, Y) + \sum_{m=1}^N c_{-m} \mathcal{L}_{N-m,-m}(X, Y) \right], \quad (18)$$

де $X + iY = (x + iy) / \rho\sigma$. При $N = 0$ простий вид функцій Лагерра - Гауса

$$\mathcal{L}_{0,m}(X, Y) = \exp(-X^2 - Y^2)(X + iY)^m$$

дозволяє представити рішення в більш компактній формі:

$$\begin{aligned}
F(x, y, l) &= \frac{1}{\sigma} \exp \left[\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} \right] \times \sum_{m=0}^{\infty} c_m \exp(-X^2 - Y^2)(X + iY)^m = \\
&= \frac{1}{\sigma} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2\sigma} \right) f \left(\frac{x + iy}{\rho\sigma} \right)
\end{aligned} \quad (19)$$

Тут $f(z)$ - така ціла аналітична функція, що $F(x, y, 0) \in L_2(\mathbf{R}^2)$. В силу формули

$$\theta(l) = -\arctan \left(\frac{2l}{k\rho^2} \right)$$

еволюція інтенсивності поля $F(x, y, l)$ при поширенні виглядає як сповільнення обертання - максимально в області перетяжки і практично нульове в дальній зоні. При цьому повний кут повороту поля при поширенні становить $\theta(\infty) - \theta(0) = -\pi/2$.

Загальним висловом (18) також можна надати більш наочну форму, якщо скористатися диференціальним поданням функцій Лагерра-Гауса з [21]:

$$\begin{aligned}
F(x, y, l) &= \frac{1}{|\sigma|} \exp \left[\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2N + 1) \arg \sigma \right] \times \\
&\times \exp(Z\bar{Z}) \frac{\partial^N}{\partial Z^N} [\exp(-2Z\bar{Z}) f(Z)] = \\
&= \frac{1}{\sigma} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2\sigma} - 2iN \arg \sigma \right) \left(\frac{\partial}{\partial Z} - 2\bar{Z} \right)^N f(Z)
\end{aligned} \quad (20)$$

4. Випадок $\theta_0 = 1$ повністю аналогічний попередньому. Вважаючи $2n + |m| + m = 2N$, знаходимо

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(1) &= \{(N, m); m = 0, -1, -2, \dots\} \cup \\
&\cup \{(N - m, m); m = 1, 2, \dots, N\},
\end{aligned}$$

$$\gamma_0 = 2N + 1 \text{ и}$$

$$\begin{aligned}
F(x, y, l) &= \frac{1}{|\sigma|} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2\sigma} - i(2N + 1) \arg \sigma \right] \times \\
&\times \left(\frac{\partial}{\partial \bar{Z}} - 2Z \right)^N f(\bar{Z}),
\end{aligned} \quad (21)$$

При $N = 0$ маємо

$$F(x, y, l) = \frac{1}{\sigma} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma} \right) f \left(\frac{x - iy}{\rho \sigma} \right) \quad (22)$$

Тут, як і в (19), $f(z)$ - довільна ціла функція, що не порушує квадратичної інтегрованості функції $F(x, y, 0)$. Ця умова виконується, наприклад, для будь-якої цілої функції $f(z)$ з порядком зростання $\rho_f < 2$. Зокрема, в якості $f(z)$ можна вибрати певний поліном. Структурно-стійкі поля для цього випадку одночасно і незалежно були отримані в [22].

5. І, нарешті, якщо θ_0 є раціональним числом, відмінним від 0 і ± 1 , то безліч $N(\theta_0)$ поряд з парою (n_0, m_0) містить деяку пару $(n_1, m_1 \neq m_0)$. В цьому випадку структурно-стійке рішення має вигляд

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp \left[\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - \right. \\ \left. - i(2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0 + 1) \arg \sigma \right] \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(X, Y) \quad (23)$$

де $X + iY = (x + iy) \exp(i\theta_0 \arg \sigma) / \rho|\sigma|$, і безліч $N(\theta_0)$ всіх пар (n, m) , за якими йде підсумовування, визначається наступним чином. Будемо вважати, що $\operatorname{sgn} m_0 = 1$ для $m_0 \geq 0$ і $\operatorname{sgn} m_0 = -1$ для $m_0 < 0$. Уявімо θ_0 у вигляді дробу P/Q , де P і Q - взаємно прості числа і $Q > 0$. Можливі варіанти: 1) одне з чисел P, Q парне, 2) обидва числа P і Q непарні.

У першому випадку

$$\mathcal{N}(\theta_0) = \{ (n_0 + (P + Q \operatorname{sgn} m_0)k, m_0 - 2Qk); \\ k \in \mathbf{Z}, n \geq 0, m \operatorname{sgn} m_0 \geq 0 \} \cup \\ \cup \{ (n_0 + |m_0| + (P - Q \operatorname{sgn} m_0)k, m_0 - 2Qk) \\ k \in \mathbf{Z}, n \geq 0, m \operatorname{sgn} m_0 < 0 \};$$

у другому випадку

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\theta_0) = & \left\{ \left(n_0 + \frac{1}{2}(P + Q \operatorname{sgn} m_0)k, m_0 - Qk \right); \right. \\ & \left. k \in \mathbf{Z}, n \geq 0, m \operatorname{sgn} m_0 \geq 0 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ \left(n_0 + |m_0| + \frac{1}{2}(P - Q \operatorname{sgn} m_0)k, m_0 - Qk \right) \right. \\ & \left. k \in \mathbf{Z}, n \geq 0, m \operatorname{sgn} m_0 < 0 \right\}. \end{aligned}$$

Проілюструємо використання цих формул на двох прикладах.

Нехай $\theta_0 = -0,4 = -2/5$. Тоді $P = -2$, $Q = 5$, і побудова безлічі $N(\theta_0)$ проводиться за варіантом 1). Якщо вибрати початкову пару (n_0, m_0) таким чином, що $m_0 > 0$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\left(-\frac{2}{5}\right) = & \left\{ (n_0 + 3k, m_0 - 10k), k \in \mathbf{Z}, -\frac{n_0}{3} \leq k \leq \frac{m_0}{10} \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (n_0 + m_0 - 7k, m_0 - 10k), k \in \mathbf{Z}, \frac{m_0}{10} < k \leq \frac{n_0 + m_0}{7} \right\} \end{aligned}$$

Зокрема, при $n_0 = 0$, то = 9 отримуємо $N(-2/5) = \{(0,9), (2, -1)\}$ і

$$\begin{aligned} F(x, y, l) = & \frac{1}{|\sigma|} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma} - 6,4i \arg \sigma \right) \times \\ & \times \left[c_1 \left(\frac{x + iy}{\rho |\sigma|} \exp(-0,4i \arg \sigma) \right)^9 + \right. \\ & \left. + c_2 \frac{x - iy}{\rho |\sigma|} \exp(0,4i \arg \sigma) L_2^1 \left(\frac{2x^2 + 2y^2}{\rho^2 |\sigma|^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Тут c_1, c_2 - довільні комплексні константи і $\sigma = 1 + 2i l / k\rho^2$. Спіральний пучок, відповідний значенням $c_1 = 1$ і $c_2 = -49i$, показаний на рис. 2.2. При розповсюдженні з області перетяжки в далеку зону пучок повертається на кут $\theta(\infty) - \theta(0) = \pi\theta_0 / 2 = -2\pi/10$. Інтенсивність не змінюється від такого повороту, тому даний спіральний пучок являє собою приклад поля, інваріантного до двовимірного перетворення Фур'є.

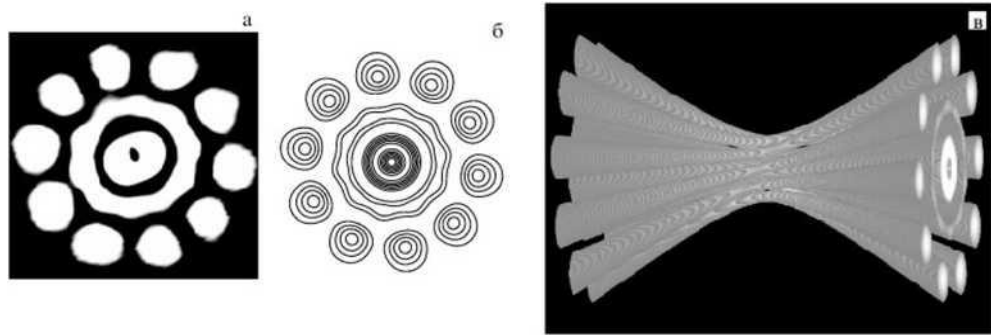


Рисунок 2. 2. Спіральний пучок, відповідний параметру обертання $\theta_0 = -2/5$: (а) експериментально зареєстроване розподіл інтенсивності спірального пучка, (б) лінії рівня функції $|L_{0,9}(x, y) - 49iL_{2,-1}(x, y)|^2$, (в) фрагмент просторового поширення пучка в області перетяжки.

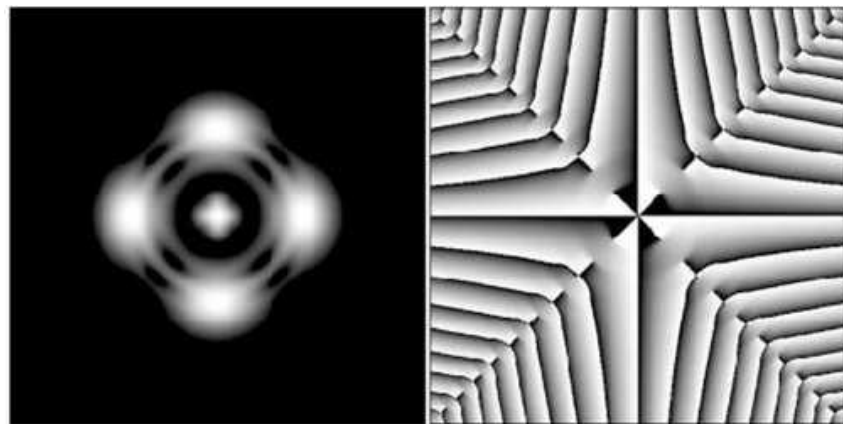


Рисунок 2. 3. Інтенсивність (а) і фаза (б) спірального пучка, відповідного параметру обертання $\theta_0 = -3$

Нехай тепер $\theta_0 = -3$. Тоді $P = -3$, $Q = 1$ і для побудови $N(\theta_0)$ використовується варіант 2).

В даному випадку, на відміну від попереднього, є нескінченне число ступенів свободи, тобто констант c_k , для побудови поля F . Відповідно, число сингулярностей фази у такого пучка може бути не тільки кінцевим, а й нескінченним. Одним із прикладів подібного роду є спіральний пучок, побудований на основі модифікованої функції Бесселя і має в площині перетяжки такий вигляд:

$$F(x, y, 0) = \exp(-z\bar{z} + az) \frac{I_v(2z\sqrt{a^2 - 2a\bar{z}})}{(2z\sqrt{a^2 - 2a\bar{z}})^v}$$

Тут a і v - довільні параметри, $z = (x + iy) / \rho$ і $\hat{z} = (x - iy) / \rho$ - комплексні

змінні. На рисунку 3 показаний пучок $F(x, y, 0) + F(y, -x, 0) + F(-x, -y, 0) + F(-y, x, 0)$ при $a = 1$, 3 і $\nu = 1$.

Таким чином, повністю завершено опис структурно-стійких рішень параболічного рівняння, що задовольняють структурному поданням (4) і нерівності (8). Світлові поля, відповідні знайденим рішенням (16) - (23), при поширенні уздовж осі l обертаються по закону $\theta(l) = \theta_0 \arctan(2l/k\rho^2)$ і збільшуються в масштабі згідно із законом $d(l) = \sqrt[4]{(1 + 4l^2/k^2\rho^4)}$.

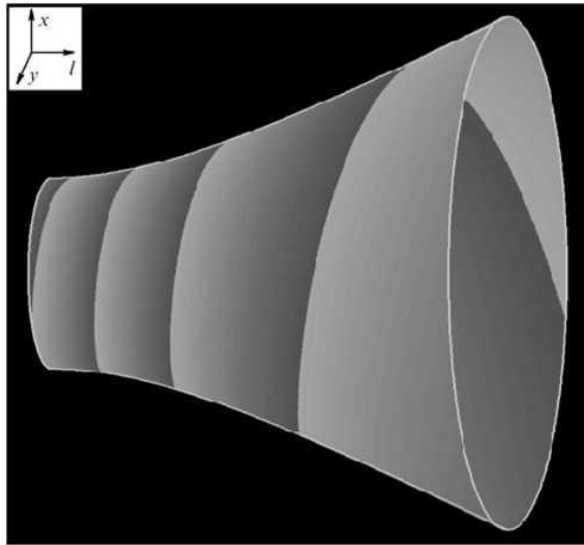


Рисунок 2. 4. Траєкторія руху точки (x_0, y_0) при поширенні спірального пучка $F(x, y, l)$ с $\theta_0 = -15$.

Якщо у вихідній площині $l = 0$ зафіксувати деяку точку (x_0, y_0) , то її шлях при поширенні поля $F(x, y, l)$ опише деяку спіраль $x + iy = (x_0 + iy_0) |\sigma| \exp(-i\theta_0 \arg \sigma)$. При малих $|\theta_0|$ назва "спіраль" досить умовно і вказує лише на деяку тенденцію до повороту, але в разі великих $|\theta_0|$ точка (x_0, y_0) при поширенні поля F здійснює $|\theta_0|/4$ обертів навколо осі l за годинниковою або проти годинникової стрілки в залежності від знака θ_0 (рис. 2.4).

Відзначимо також, що лінії постійної фази знайдених рішень поза перетяжки мають спиралевидную форму. Ці дві обставини дозволили запропонувати назву "спіральні пучки світла" для знайдених світлових полів [16]. Зв'язок між параксіальною оптикою і квантовою механікою розглядалася різними авторами (див., Наприклад, [18, 23]). Яка конкретна квантовомеханічна ситуація відповідає спіральним пучкам?

2.1.5. Експериментальна реалізація спіральних пучків

Метод астигматичного перетворення.

Відомо [24], що в стійкому двозеркальному резонаторі частоти генерації визначаються виразом

$$\omega_q = \frac{2c}{L_0} (\gamma \arccos \sqrt{g_1 g_2} + \pi q) \quad (24)$$

де c - швидкість світла, L_0 - довжина повного обходу резонатора, $g_{1,2} = (1 - L_0 / 2R_{1,2})$ - конфігураційні параметри, $R_{1,2}$ - радіуси кривизни дзеркал, q - аксіальний індекс, γ - параметр, рівний $\gamma = n + m + 1$ для мод Ерміта - Гауса $H_{n,m}(x, y)$ і $\gamma = 2n + |m| + 1$ для мод Лагерра- Гауса $L_{n,m}(x, y)$. Легко бачити, що моди, для яких $\gamma = \text{const}$, є виродженими по частоті. Якщо резонатор такий, що $\arccos \sqrt{g_1 g_2} = \pi M/N$, де M і N - взаємно прості числа, то умова виродження по частоті виявляється справедливим також і для мод, які відповідають умові

$$\gamma M + qN = \text{const} \quad (25)$$

У зв'язку з цим у суми таких мод відсутні биття, і вона також є стаціонарним, не залежних від часу в кожному своєму перетині розподілом. Однак, як легко бачити, параметри у доданків суми різні, тому розподіл інтенсивності такої суперпозиції буде змінюватися при поширенні. Нехай, наприклад, що генерується поле є сума таких мод Лагерра - Гауса $L_{n_1, m_1}(x, y)$ і $L_{n_2, m_2}(x, y)$, що $\gamma_1 \neq \gamma_2$, і виконується умова (25). Тоді згідно (23) ця сума є спіральний пучок з параметром обертання $\theta_0 = (\gamma_1 - \gamma_2) / (m_2 - m_1)$. Однак в реальних резонаторах через наявність анізотропії (наприклад, астигматизму вікон Брюстера), якщо не приймаються спеціальні заходи, зазвичай генеруються моди Ерміта - Гауса, тому безпосереднє отримання спірального пучка досить важко. виправити ситуацію можна, скориставшись результатами роботи [25], де теоретично і експериментально показано, що за допомогою астигматичного оптики можна перетворити будь-який пучок Ерміта - Гауса в відповідний пучок Лагерра-Гауса і назад. Перетворення має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\mathbf{R}^2} \exp \left[-i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2} \right] \mathcal{H}_{n,m} \left(\frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho} \right) d\xi d\eta = \\
& = \frac{\pi\rho^2}{\sqrt{2}} (-1)^{n+m} \exp \left(-\frac{i\rho^2 xy}{4} \right) \times \\
& \times \begin{cases} (2i)^n m! \mathcal{L}_{m,n-m} \left(\frac{\rho x}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho y}{2\sqrt{2}} \right) & (n \geq m), \\ (2i)^m n! \mathcal{L}_{n,m-n} \left(\frac{\rho y}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho x}{2\sqrt{2}} \right) & (n \leq m). \end{cases}
\end{aligned} \tag{26}$$

Його можна реалізувати різними способами за допомогою циліндричної і сферичної оптики. Приклади оптичних схем і результати експериментів по конкретним реалізаціям перетворення (26), яке далі будемо називати астигматичним, наведені в [16, 25].

Нехай пучок, що генерується лазером, являє собою суму двох мод Ерміта-Гауса з індексами (n_1, m_1) , (n_2, m_2) і $n_1 + m_1 \neq n_2 + m_2$. Астигматичного перетворення дозволяє його трансформувати в суму двох мод Лагерра-Гауса з індексами $(\min(n_j, m_j), n_j - m_j)$, $j = 1, 2$. В результаті буде отримано вже спіральний пучок з параметром обертання $\theta_0 = (n_1 + m_1 - n_2 - m_2) / (n_2 + m_2 - n_1 - m_1)$.

Розглянемо для прикладу випадок $M / N = 1/3$ (резонатор: $R_1 = 2$ м, $R_2 = \infty$, $L_0 = 3$ м). У ньому буде виродилися по частоті, наприклад, сума мод Ерміта-Гауса виду $\sum_k c_k H_{0,3k+2}(x, y)$ (рис. 2.5). подібна комбінація може бути реалізована за допомогою внесення тонких дротиків (~ 15 мкм) в поле резонатора. Легко бачити, що результатом астигматичного перетворення такого поля буде спіральний пучок з $2\pi/3$ -симетрією (рис. 2.6).

Внутрірезонаторними синтез спіральних пучків.

Для визначення конфігурації резонаторів, що дозволяють забезпечувати безпосередню генерацію спіральних пучків, розглянемо поведінку такого пучка в стійкому резонаторі, описуваному матрицею повного обходу $ABCD$.

Як було показано, довільний спіральний пучок F , параметр обертання

якого дорівнює θ_0 , на відстані l від області перетяжки виражається через моди Лагерра-Гауса наступним чином:

$$\begin{aligned} F(r, \phi) &= \frac{w_0}{w} \exp \left(\frac{ikr^2}{2R} - i\gamma_0 \Phi_0 \right) \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m} \left(\frac{r}{w}, \phi \right) = \\ &= \frac{w_0}{w} \exp \left(\frac{ikr^2}{2Q} - i\gamma_0 \Phi_0 \right) \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \left(\frac{r}{w} \right)^{|m|} \times \exp(im\phi) L_n^{|m|} \left(\frac{2r^2}{w^2} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

де $L_{n,m}(r, \phi) = \exp(-r^2) r^{|m|} \exp(im\phi) L_n^{|m|}(2r^2)$ – мода Лагерра- Гауса в полярних координатах; Φ_0 - фазовий набіг нульовий моди з площини перетяжки; w_0, w - гаусові параметри пучка в площині перетяжки і на відстані l від неї відповідно; $1/Q = 1/R + 2i/kw^2$ - комплексний параметр пучка; k - хвильове число і $\mathcal{N}(\theta_0)$ - безліч таких цілочисельних пар (n, m) , що $2\pi + |m| + \theta_0 m + l = \gamma_0 = \text{const.}$

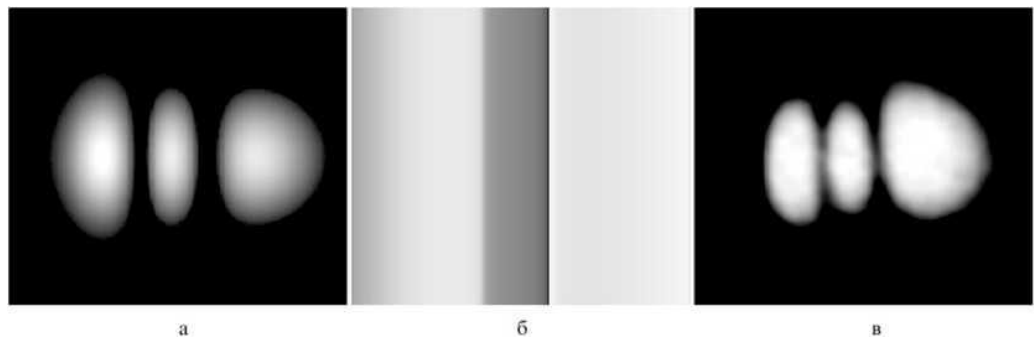


Рисунок 2. 5. Інтенсивність (а) і фаза (б) кодировочние поля $\exp(-\rho^2 x^2/8) h(y|\Delta_2)$ і експериментальне розподіл інтенсивності (в) пучка, що виходить з гелій-неонового лазера

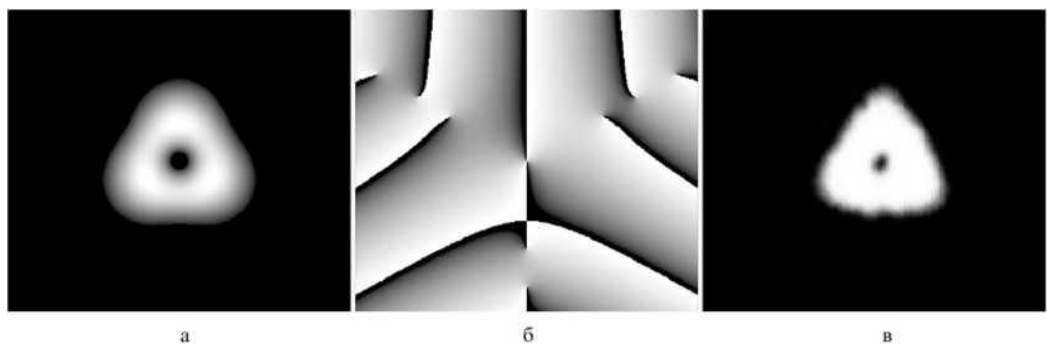


Рисунок 2.6. Інтенсивність (а) і фаза (б) спірального пучка $L(z, \hat{z}|\Delta_2)$ і його експериментальна реалізація (в). Розподіл інтенсивності (в) отримано в результаті астигматичного перетворення пучка, інтенсивність якого показана на рис. 2.5в.

Тут і далі в цьому розділі замість ρ , $\rho|\sigma|$, $\arg \sigma$ використовуються відповідно, w_0 , w , Φ_0 , оскільки обчислення з матрицею $ABCD$ зазвичай описуються в таких позначеннях. Крім того, замість декартової

використовується полярна система координат, що дозволяє більш наочно представляти залежності, пов'язані з кутами повороту.

Після перетворення поля (27) оптичною системою з матрицею $ABCD$ воно має вигляд [26]

$$F_1(r, \phi) = \frac{w}{w_1} \exp \left(ikL_0 + \frac{ikr^2}{2Q_1} \right) \times \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \exp [-i(2n + |m| + 1)\Phi] \left(\frac{r}{w_1} \right)^{|m|} \times \exp(im\phi) L_n^{|m|} \left(\frac{2r^2}{w_1^2} \right) \quad (28)$$

де L_0 - оптична довжина шляху вздовж осі системи, $w_1^2 = w^2/A + B/Q^2$, $\Phi = \arg(A + B/Q)$, $Q_1 = (AQ + B)/(CQ + D)$ і $AD - BC = 1$. Нехай тепер $ABCD$ - матриця повного обходу деякого стійкого резонатора.

Тоді з урахуванням, що $2n + |m| + 1 = \gamma_0 - \theta_0 m$, еволюція спірального пучка (27) при обході резонатора буде наступною:

$$F_1(r, \phi) = \exp \left(ikL_0 - i\gamma_0 \arccos \frac{A + D}{2} \right) \times \times F \left(r, \phi + \theta_0 \arccos \frac{A + D}{2} \right). \quad (29)$$

Тут L_0 - довжина повного обходу резонатора.

Виконання умови саморепродукції такого пучка досить здійснити його поворот або на кут $-\theta_N$, або на кут $2\pi - \theta_N$. Відомо, що такі повороти здійсненні в кільцевих резонаторах, наприклад, за допомогою призми Дове (так звані резонатори з обертанням поля) [24]. Резонатори такого типу використовувалися для поліпшення однорідності поперечного розподілу лазерного випромінювання. Однак, на відміну від справжньої роботи, кут повороту пучка в згаданих резонаторах вибирався без зв'язку з конфігураційними параметрами резонатора (зазвичай $\pi/2$ або π). Виконується умова саморепродукції пучка $F_1(r, \phi) = F(r, \phi)$ і поле (27) буде власною модою цього резонатора з частотою генерації

$$\omega_q = \frac{c}{L_0} \left(\gamma_0 \arccos \frac{A + D}{2} + 2\pi q \right) \quad (30)$$

Видно, що, на відміну від звичайного резонатора без обертання пучка ($\theta_0=0$), виродженими по частоті будуть моди Лагерра-Гауса, що задовольняють умові $2n + |m| + \theta_0 m = \text{const}$, і умова виродження залежить від кута повороту пучка в резонаторі. Це легко зрозуміти, якщо звернути увагу на те, що поворот розподілу комплексної амплітуди пучка Лагерра-Гауса $L_{n,m}(r, \phi)$ на кут θ еквівалентний придбання ним додаткового набігу фази $m\theta$:

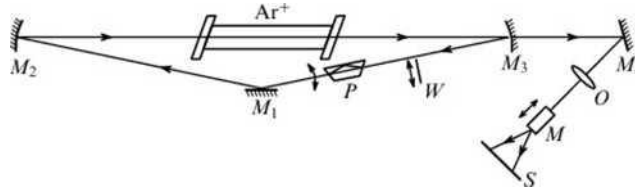


Рисунок 2.7. Експериментальна установка кільцевого лазера на базі аргон-іонного лазера.

$$\mathcal{L}_{n,m}(r, \phi + \theta) = \mathcal{L}_{n,m}(r, \phi) \exp(im\theta)$$

На рисунку 2.7 показана установка, створена для експериментальної апробації всередині резонатора синтезу спіральних пучків. Кільцевий лазер реалізований на базі аргон-іонного лазера з довжиною хвилі $\lambda = 0,488$ мкм, плоским дзеркалом M_1 (коефіцієнт відбиття 0,94) і сферичними дзеркалами M_2, M_3 ($R_2 = R_3 = R = 3$ м, коефіцієнти відбиття 0,995 і 0,98 відповідно). Відстані між дзеркалами $M_1M_2 = M_1M_3 = l = 1.27$ м, $M_2M_3 = l_0 = 2,4$ м. Така геометрія резонатора у вигляді тупокутного трикутника була обрана для зниження впливу астигматизму дзеркал M_2, M_3 . Поворот поля здійснюється за допомогою призми Дове P (при повороті призми на кут α пучок повертається на кут 2α). Слід зазначити, що призма P здійснює поворот розподілу комплексної амплітуди пучка, але відносно слабо впливає на стан поляризації пучка. Дія призми зводиться до того, що пучок стає злегка еліптично поляризованим. Інтенсивність компоненти поля, перпендикулярного площині резонатора, залежить від кута повороту призми P і становить 0-4% від інтенсивності компоненти, що лежить в площині резонатора. Еліптичність поляризації пучка має місце лише на ділянці резонатора $P - M_1 - M_2$ -активний елемент. В іншій частині резонатора

напрямок поляризації визначається орієнтацією вікон Брюстера активного елементу і лежить в площині резонатора. Генерований лазером пучок спостерігався і реєструвався за частково пропускає дзеркалом M_3 за допомогою об'єктива O і мікроскопа M в площині екрану S . Матриця повного обходу резонатора, починаючи з M_1 , має вигляд

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4l}{R} - \frac{2l_0}{R} + \frac{4ll_0}{R^2} & 2l + l_0 - \frac{4l^2}{R} - \frac{4ll_0}{R} + \frac{4l^2l_0}{R^2} \\ -\frac{4}{R} + \frac{4l_0}{R^2} & 1 - \frac{4l}{R} - \frac{2l_0}{R} + \frac{4ll_0}{R^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,939 & 0,446 \\ -0,267 & -0,939 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Перетяжка пучка знаходиться в околиці дзеркала M_1 довжина Релея для даного пучка становить $I_R = B / [1 - (A + D)^2/4]^{1/2} \approx 1300$ мм, що відповідає гаусову параметру $w_0 = 0,45$ мм. Набіг фази для основної моди в порожньому резонаторі становить $\phi_0 = \arccos(-0,94) \approx 160^\circ$ і, таким чином, частоти генерації двох сусідніх поперечних мод при нульовому вугіллі повороту призми розрізняються на 27 МГц, відповідно для двох сусідніх поздовжніх мод частотний інтервал дорівнює 60 МГц. Зміна складу поперечних мод здійснюється введенням в пучок тонкої дротики W діаметром ~ 15 мкм.

При виконанні експериментів виявлено, що спіральні пучки при різних параметрах обертання реалізуються при іншому значенні повороту призми, зокрема $\alpha = -\theta_0 \times 78^\circ$. Дане відхилення виявилось подібним у всіх експериментах і обумовлено, мабуть, наявністю активного середовища.

На рисунку 2.8 представлені теоретичні і експериментальні результати для двох спіральних пучків. У верхньому ряду наведені результати експерименту по формуванню спірального пучка з параметром обертання $\theta_0 = 1/3$, $\alpha = -26^\circ$ і результати чисельних розрахунків для поля $F(r, \phi) = L_{0,-2}(r, \phi) + 2L_{0,1}(r, \phi)$. Фаза пучка має чотири сингулярності, або дислокації хвильового фронту, причому сингулярність в центрі і сингулярності на периферії мають протилежні знаки. У нижньому ряду представлені аналогічні результати для спірального пучка з параметром обертання $\theta_0 = 1/5$, $\alpha \approx 15,5^\circ$ і чисельні розрахунки для поля $F(r, \phi) = L_{0,-3}(r, \phi) + 2L_{0,2}(r, \phi)$. В цьому випадку фаза пучка містить сім сингулярних точок: в центрі -

сингулярність типу z другого порядку (в експерименті ця виродженість злегка порушена) і п'ять сингулярностей типу \hat{z} на периферії.

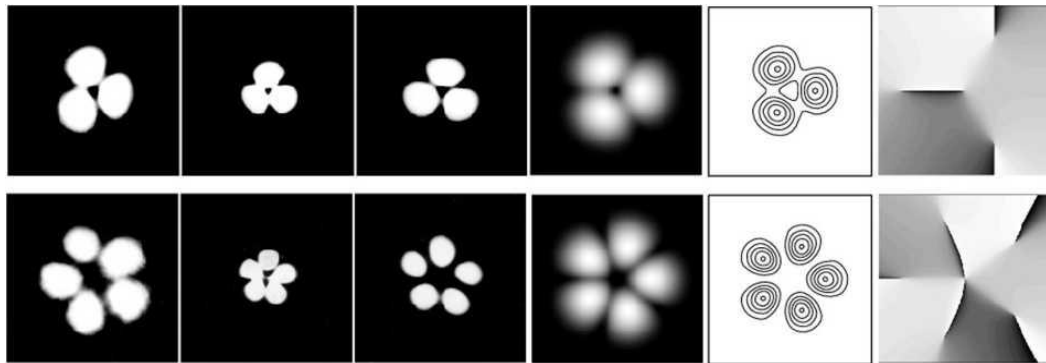


Рисунок 2.8. Експериментально зареєстровані інтенсивності спіральних пучків до (а), в (б) і після (в) області перетяжки при куті повороту призми α . Теоретичні розподілу інтенсивності (г) і фази (е), а також лінії рівня інтенсивності (д) спірального пучка з параметром обертання θ_0 . Верхній ряд відповідає значенням $\alpha = -26^\circ$, $\theta_0 = 1/3$, нижній ряд - значенням $\alpha \approx -15,5^\circ$, $\theta_0 = 1/5$.

Можливості реалізації різних спіральних пучків в даному експерименті обмежувалися втратами на відображення і дифракційними втратами. З одного боку, при великих кутах повороту призми (наприклад, для пучків з $\theta_0 = 1$, $\alpha = -78^\circ$) кут падіння пучка на призму Дове значно відрізняється від кута Брюстера, і втрати в резонаторі стають занадто великими. З іншого боку, реалізація пучків, наприклад, з $\theta_0 = 1/4$ вимагає присутності мод Лагерра-Гауса $L_{n1,m1}(r, \phi)$ і $L_{n2,m2}(r, \phi)$ з різницею індексів $|m_1 - m_2|$ по крайній мірі рівній 8, для яких стають великими дифракційні втрати в резонаторі. Зміна параметра резонатора $A + D$ в нашому експерименті було утруднено за конструктивними причин.

Таким чином, спіральні пучки - це моди кільцевого лазера з обертанням поля, що підтверджено експериментально внутрішніми резонаторними генерацією спіральних пучків з різними параметрами обертання і хорошим згодою з результатами чисельних експериментів [27]. Отримані результати показують принципову можливість генерації спіральних пучків з дуже різними просторовими характеристиками і параметрами обертання в лазері з відповідним резонатором і коефіцієнтом посилення активного середовища.

2.2 Спіральні пучки із заданим розподілом інтенсивності

2.2.1. Пучки в формі плоских кривих

Як зазначено у вступі, зв'язок між інтенсивністю і фазою в одновимірному і двовимірному випадках радикально різниться. Ненульовий ротор вектора потоку світлової енергії значно ускладнює зв'язок між інтенсивністю і фазою в цьому випадку. Разом з тим ця складність породжує і нові можливості.

Так, в розділі 2.4 було показано, що в двовимірному випадку існує клас когерентних світлових полів, названих спіральними пучками, виду

$$F(x, y, l) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma}\right) f\left(\frac{x \pm iy}{\rho \sigma}\right) \quad (32)$$

зберігають свою структуру з точністю до масштабу і обертання. Тут $f(z)$ - довільна ціла аналітична функція, $\sigma = 1 + 2il/k\rho^2$, l - відстань вздовж напрямку поширення пучка, k - хвилеве число, $\rho = \text{const}$, знак в аргументі $f(z)$ визначає напрямок обертання пучка при поширенні.

З даного подання видно, що клас полів досить широкий, однак доказ існування пучка такого роду з визначеною інтенсивністю і конструктивний спосіб його побудови є нетривіальним завданням. Дослідженню можливостей цілеспрямованого синтезу пучків (32) присвячений даний розділ (див. також [28]).

Структурна стійкість інтенсивності спіральних пучків (32) при всіх l дозволяє, не змінюючи спільності, обмежитися розглядом пучка в площині перетяжки $l = 0$ (що відповідає $\sigma = 1$) і знаком «+» в аргументі функції f . Введемо позначення

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z}{\rho}\right) \quad (33)$$

де $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ - комплексні змінні. Тоді $J(z, \bar{z})$ задає спіральний пучок $F(x, y, l)$ в площині $l = 0$ і його еволюцію при поширенні. Тому в подальшому будемо посилалися на $J(z, \bar{z})$ як на спіральний пучок (32).

Розглянемо деякі властивості даного класу спіральних пучків, що впливають з уявлення (33) і використовувані в подальшому.

Властивість А. Якщо $J(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f_n(z/\rho)$ - деяка сукупність спіральних пучків, то їх лінійна комбінація, $J(z, \bar{z}) = \sum_n c_n J_n(z, \bar{z})$ - також спіральний пучок. Більш того, якщо

$$\mathcal{J}(z, \bar{z}, a) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z}{\rho}, a\right)$$

- параметричне сімейство спіральних пучків, то $J(z, \bar{z}) = \int J(z, \bar{z}, a) da$ - також спіральний пучок.

Властивість Б. Якщо $J(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f(z/\rho)$ - деякий спіральний пучок, то

$$\mathcal{J}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z \exp(-i\alpha)}{\rho}\right)$$

є спіральний пучок, що володіє тим же розподілом інтенсивності, що і $J_0(z, \bar{z})$, але поверненим на кут α .

Властивість В. Якщо $J_0(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f(z/\rho)$ - деякий спіральний пучок, то

$$\mathcal{J}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - 2z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z - z_0}{\rho}\right) \quad (34)$$

- спіральний пучок, що володіє тим же розподілом інтенсивності, що і $J_0(z, \bar{z})$, але зміщеним в точку z_0 . В даному випадку, на відміну від властивості Б, заміна змінної $z \rightarrow z - z_0$ не приводить відразу ж до бажаного результату.

З (34) при $f(z) \equiv 1$ виходить "елементарний спіральний пучок"

$$\mathcal{J}_{z_0}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - 2z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right) \quad (35)$$

який має гауссово розподіл інтенсивності, зміщене в точку z_0 . Фаза пучка є лінійною функцією координат, і, звичайно, пучок поширюється уздовж деякої прямої. У зв'язку з цим повчально розглянути, як реалізується його "обертання" при розповсюдженні. Використовуючи уявлення (32), легко

знайдемо, що траєкторія максимуму інтенсивності пучка (35) в просторі (x, y, l) має такий вираз:

$$x + iy = z_0 |\sigma| \exp(i \arg \sigma) = (x_0 + iy_0) \left(1 + \frac{2il}{k\rho^2} \right) \quad (36)$$

де x_0, y_0 - координати точки максимуму z_0 інтенсивності при $l = 0$.

Розглянемо кілька "елементарних спіральних пучків" при $|z_0| = \text{const}$. З (35) видно, що траєкторії максимумів пучків - прямі лінії - утворюють в просторі (x, y, l) поверхню однополостного гіперболоїда обертання

$$x^2 + y^2 - \frac{4|z_0|^2}{k^2 \rho^4} l^2 = |z_0|^2$$

Траєкторії максимумів окремих пучків і їх положення на поверхні гіперболоїда показані на рис. 2.9. Для спіральних пучків загального вигляду траєкторії руху точок, що виходять при $l = 0$ з точки z_0 , при поширенні пучка також лежать на цій поверхні гіперболоїда і являють собою в загальному випадку спіралі.

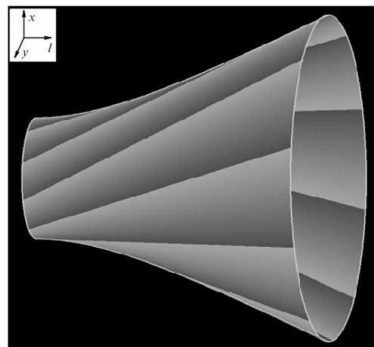


Рисунок 2.9. Траєкторії точок максимуму гаусових пучків (35) - прямі лінії - при $|z_0| = \text{const}$ і їх положення на поверхні однополостного гіперболоїда.

Спіральні пучки цікаво зіставити з когерентними станами $|\alpha\rangle$ в квантовій механіці й оптики [29].

Використовуючи властивість А для підсумовування зміщених в різні точки гауссових пучків виду (35), вже можна формувати структурно-стійкі світлові поля з новими властивостями. Найпростішим прикладом такого роду може служити пучок

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | [-T, T]) = \int_{-T}^T \mathcal{S}_t(z, \bar{z}) dt = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \int_{-T}^T \exp\left(-\frac{t^2}{\rho^2} + \frac{2zt}{\rho^2}\right) dt \quad (37)$$

який відповідає всюди щільному заповненню пучками виду (35) дійсного відрізка $[-T, T]$ на комплексній площині (рис. 2.10). Пучок має гаусового спадання в будь-якому напрямку поза відрізка $[-T, T]$, і при $\rho \ll T$ майже вся енергія пучка зосереджена в невеликій околиці цього відрізка.

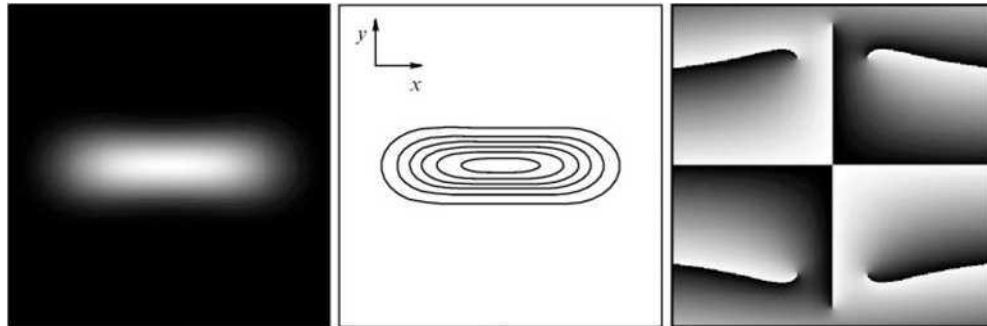


Рисунок 2. 10. Інтенсивність (а), її лінії рівня (б) і фаза (в) спірального пучка в формі відрізка $[-T, T]$. На фазовому розподілі видно наявність шести сингулярностей; точка в центрі не є нулем: присутність лише чорного і білого кольорів в її околиці говорить про те, що там відбувається склеювання фаз $\varphi = 0$ і $\varphi = 2\pi$.

З (37) за допомогою властивостей Б і В легко отримати спіральний пучок з розподілом інтенсивності, які мають форму довільного відрізка $[z_1, z_2]$ на комплексній площині. Нехай

$$z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2), \quad T = \frac{1}{2}|z_2 - z_1|, \quad \alpha = \arg(z_2 - z_1)$$

Тоді відображення $z \rightarrow z_0 + z \exp(i\alpha)$ переводить відрізок $[-T, T]$ у відрізок $[z_1, z_2]$. Тому пучок, відповідний відрізку $[z_1, z_2]$, має вигляд

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_1, z_2]) = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - 2z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right) \times \int_{-T}^T \exp\left[-\frac{t^2}{\rho^2} + \frac{2t(z - z_0)\exp(-i\alpha)}{\rho^2}\right] dt \quad (38)$$

Будемо називати відрізок $[z_1, z_2]$ породжує відрізком для спірального пучка (38).

В точках прямої $z_2 = c z_1 + (1 - c) z_2$, симетричних відносно точки $(z_1 + z_2)/2$ спіральний пучок $J(z_1, \bar{z} | [z_1, z_2])$ приймає комплексно-зв'язані значення. Зокрема, на кінцях відрізка $[z_1, z_2]$

$$\mathcal{S}(z_1, \bar{z}_1 | [z_1, z_2]) = \overline{\mathcal{S}}(z_2, \bar{z}_2 | [z_1, z_2]) = \exp \left(i \frac{\text{Im } z_1 \bar{z}_2}{\rho^2} \right) \int_0^{|z_2 - z_1|} \exp \left(-\frac{t^2}{\rho^2} \right) dt \quad (39)$$

Завдяки сильній локалізації пучків (38) при $\rho \ll T$ реалізованих відрізків, інтерференція таких пучків при додаванні проявляється слабо, якщо відрізки досить віддалені один від одного. У зв'язку з цим розподіл інтенсивності поля, що представляє собою сукупність таких пучків, близько до суми їх розподілів інтенсивності.

Розглянемо тепер стикаються відрізки $[a, b]$ і $[b, c]$, розташовані на дійсній осі. Тоді відповідні спіральні пучки зливаються в один "без шва":

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | [a, c]) = \mathcal{S}(z, \bar{z} | [a, b]) + \mathcal{S}(z, \bar{z} | [b, c])$$

У загальному випадку, коли два відрізки $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_3]$ лежать на одній прямій, з подання (38) випливає, що аналогічна стикування пучків. $J(z, \bar{z} | [z_1, z_2])$ і $J(z, \bar{z} | [z_2, z_3])$ має вигляд

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_1, z_3]) = \exp \left(-i \frac{\text{Im } \bar{z}_2 z_3}{\rho^2} \right) \mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_1, z_2]) + \exp \left(-i \frac{\text{Im } \bar{z}_2 z_1}{\rho^2} \right) \mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_2, z_3]) \quad (40)$$

тобто для забезпечення гладкою стикування необхідне узгодження фаз між пучками-складовими. З (39), (40) випливає, що фази доданків в точці стикування z_2 рівні.

Тому, якщо розглянути пучок $J(z, \bar{z} | [z_1, z_2]) + \exp(i\phi) J(z, \bar{z} | [z_2, z_3])$, при $\phi \in [0, 2\pi)$, то однорідність сумарною інтенсивності вздовж відрізка $[z_1, z_3]$ буде найкращою при

$$\phi = \arg \mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2 | [z_1, z_2]) - \arg \mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2 | [z_2, z_3]) = \frac{\text{Im } \bar{z}_2 (z_3 - z_1)}{\rho^2} \quad (41)$$

і рівність (41) можна прийняти за умову оптимального з точки зору однорідності інтенсивності об'єднання двох пучков- "відрізків", коли точки z_1, z_2, z_3 лежать на одній прямій. Слід зазначити, що рівність (41) може виконуватися з точністю до $2\pi N$ (N - ціле число), оскільки виражає зв'язок між показниками комплексних експонент.

Нехай тепер точки z_1, z_2, z_3 не лежать в одній прямій. Застосуємо міркування за погодженням фаз для побудови спірального пучка, що має

форму ламаної $[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3]$. Чисельні експерименти показали, що розподіл інтенсивності пучка вздовж формованої ламаної досить однорідно при різних кутах між ланками $[z_1, z_2]$ і $[z_2, z_3]$. Таким чином, узгодження фаз є корисним принципом для конструювання спіральних пучків, що реалізують різні ламані. Формула (42) легко узагальнюється на багатоланкові ламані.

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3]) = \mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_1, z_2]) + \exp\left(i \frac{\text{Im } \bar{z}_2(z_3 - z_1)}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_2, z_3]) \quad (42)$$



Рисунок 2.11. Інтенсивність (а) і фаза (б) пучка, побудованого з базисних спіральних пучків

Використовуючи описані вище пучки як базисні, можна будувати досить різноманітні поля, структурно-стійкі до фокусування і поширенню. Приклад поля, де використані всі види таких базисних пучків, наведено на рис. 2.11. Відповідно до властивості В, при зміщенні спіральний пучок набуває додаткової лінійну фазу, тому базисні пучки на даному рисунку, що володіють однаковою інтенсивністю, мають різні фазові розподілу.

З отриманих результатів природно виникає наступне питання. Нехай є деяка крива на площині, задана в комплексній параметричній формі $\zeta = \zeta(t)$, де параметр t пробігає деякий інтервал $[0, T]$. Чи існує спіральний пучок $J(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T])$, що має форму цієї кривої? Звичайно, вираз "пучок у формі кривої $\zeta(t)$ " передбачає наявність деякого критерію відбору, проте не будемо поки зупинятися на строгій математичній формулюванні, вважаючи, що бажаним результатом буде чисто візуальне схожість. А саме: в точках z , що лежать на кривій $\zeta(t)$, інтенсивність бажаного пучка повинна бути якомога більше, а в інших точках площини якомога менше.

Побудуємо спіральний пучок $J(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T])$ як граничний випадок пучків, що реалізують ламані, які апроксимують криву $\zeta(t)$. Нехай

параметр t кривої $\zeta(t)$ змінюється від 0 до T , $\{kT/n, k = 0, 1, \dots, n\}$ - розбиття відрізка $[0, T]$ і $\{\zeta_k = \zeta(kT/n, k = 0, 1, \dots, n)\}$ - відповідне йому розбиття кривої $\zeta(t)$ (рис. 12). Розглянемо апроксимацію кривої $\zeta(t)$ ламаної

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} [\zeta_k, \zeta_{k+1}] = [\zeta_0, \zeta_1] \cup [\zeta_1, \zeta_2] \cup \dots \cup [\zeta_{n-1}, \zeta_n]$$

і набір пучков- "відрізків" $J(z, \bar{z} | \zeta_k, \zeta_{k+1})$, реалізують окремі ланки цього ламаної.

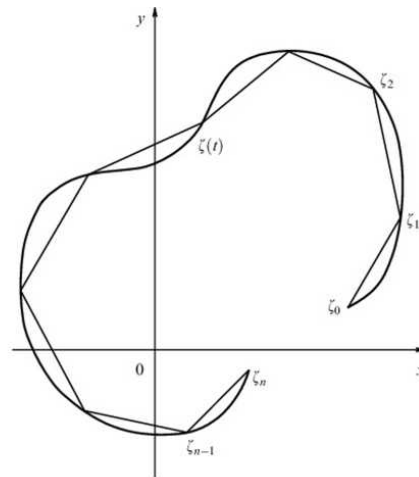


Рисунок 2.12. Крива $\zeta(t)$ і її апроксимуюча ломана.

Використовуючи уявлення (42) для дволанковий ламаної, запишемо спіральний пучок для багатоланкової апроксимуючої ламаної:

$$\mathcal{S}\left(z, \bar{z} \left| \bigcup_{k=0}^{n-1} [\zeta_k, \zeta_{k+1}] \right. \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp(i\phi_k) \mathcal{S}(z, \bar{z} | [\zeta_k, \zeta_{k+1}]) \quad (43)$$

Тут $\phi_0 = 0$, а інші константи ϕ_k служать для узгодження фаз в точках ζ_k . Умова узгодження фаз для кожної пари пучків, що реалізують відрізки, що мають спільну точку, виглядає наступним чином:

$$\phi_{k-1} + \arg \mathcal{S}(\zeta_k, \bar{\zeta}_k | [\zeta_{k-1}, \zeta_k]) = \phi_k + \arg \mathcal{S}(\zeta_k, \bar{\zeta}_k | [\zeta_k, \zeta_{k+1}])$$

$$k = 1, \dots, n-1$$

Остаточна формула

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T]) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \int_0^T \exp\left\{-\frac{\zeta(t)\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \frac{2z\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t [\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)] d\tau\right\} |\zeta'(t)| dt \quad (44)$$

Отже, спіральний пучок для кривої $\zeta(t)$ побудований. Наскільки форма його розподілу інтенсивності відповідає кривої $\zeta(t)$?

Як видно з (44), пучок виявився представлений через інваріанти кривої: диференціал довжини дуги $|\zeta'(t)| dt$ і орієнтовану площу сектора, замітає при русі вздовж кривої

$$\frac{1}{4i} \int_0^t (\bar{\zeta} \zeta' - \zeta \bar{\zeta}') d\tau$$

Тому пучок визначається кривою як геометричним об'єктом на площині, зокрема, не залежить від її параметризації.

Але при побудові пучка (44) принцип узгодження фаз використовувався для двох і тільки для двох дотичних ланок ламаної і не враховувався вплив інших. Очевидно, що при зменшенні довжини ланок ламаної протяжність відповідних їм спіральних пучків не прагне до нуля і їх взаємовплив посилюється. Крім того, істотну роль грає форма кривої. Для прикладу на рис. 13 наведені інтенсивність і фаза пучка для спіралі Архімеда $\zeta(t) = t \exp(ict)$. Крок спіралі був підібраний так, щоб показати інтерференцію між її витками. Взаємний вплив витоків збільшується при зменшенні кроку, оскільки він стає порівняємо з гаусовим параметром пучка ρ .

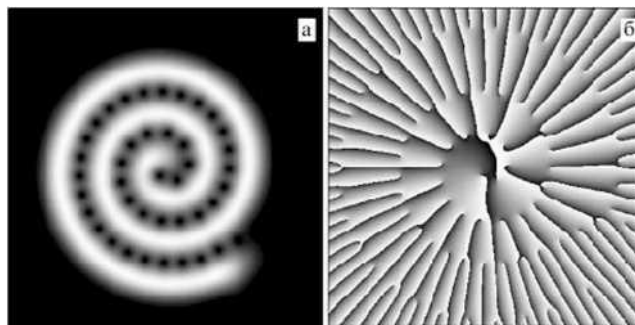


Рисунок 2.13. Інтенсивність (а) і фаза (б) спірального пучка в формі спіралі Архімеда. Між витками видно ізолювані нулі інтенсивності.

Для замкнутих кривих $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$, взаємовплив виявляється в тому, що при побудові спіральних пучків, відповідних замкнутим ламаним, потрібне узгодження фаз першого і останнього ланок в точці $\zeta_0 = \zeta_n$.

Таким чином, зв'язок між кривою $\zeta(t)$ і спіральним пучком (44) в загальному випадку не є очевидною. Деякі аспекти цього питання розглянуті в наступному розділі.

2.2.2. Властивості пучків у вигляді замкнутих кривих

Умова квантування.

Пучки для замкнутих кривих займають особливе місце і заслуговують окремого розгляду. Нехай функція $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$, описує замкнуту криву без самоперетинів. Не зраджуючи спільності, можна вважати, що з ростом t крива обходить в напрямку проти годинникової стрілки. Визначимо $\zeta(t)$ для всіх речових t , продовжуючи її періодично за межі відрізка $[0, T]$. Тоді функції $\zeta(t+a)$, $t \in [0, T]$, при різних a описують одну криву. Чи збігаються спіральні пучки для кривих $\zeta(t+a)$, при різних a ? Покажемо, що пучки, побудовані для замкнутих кривих, виявляють характерні властивості квантування. Це виражається в тому, що, по-перше, розподіл інтенсивності таких пучків зазнає радикальних змін при перетворенні подібності $\zeta(t) \rightarrow v\zeta(t)$ і володіє візуальною схожістю з кривою $v\zeta(t)$ лише за певних дискретних значеннях v . По-друге, тільки для цих же значень v інтенсивності пучків, побудованих за кривими $v\zeta(t+a)$ при різних a , однакові.

Знайдемо умову, за якої інтенсивності спіральних пучків, побудованих для кривих $\zeta(t)$ і $\zeta(t+a)$, збігаються:

$$\exp[i\Psi(a)] \mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [a, a+T]) \equiv \mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [0, T]) \quad (45)$$

де $\Psi(a)$ - деяка матеріальна функція, яка не залежить від z (інакше, скорочуючи обидві частини (45) на гаусову функцію, отримуємо, що Ψ є аналітична функція від z і, отже, не може бути дійсною функцією при всіх z).

Інтенсивність пучка не залежить від початкової точки інтегрування a лише для кривих, площа яких задовольняє умові квантування:

$$S = \frac{1}{2} \pi \rho^2 N \quad (N = 1, 2, \dots) \quad (46)$$

Будемо називати замкнуті криві, які задовольняють рівності (46), N -квантованими кривими, а спіральні пучки для таких кривих - N -квантованими пучками. Якщо звернутися до квантово-механічної аналогії, зазначеної в попередньому розділі, то спіральним пучків з $\theta_0 = \pm 1$, $\gamma_0 = 1$ відповідають хвильові функції частки в постійному магнітному полі в основному стані. При цьому умова (46) відповідає квантованим магнітному потоку через контур $\zeta(t): \Phi = (2\pi\hbar c/e) N$ (див. також [30]).

Умова квантування (46) природно виходить з розгляду замкнутих апроксимуючих ламаних як граничний випадок додаткової умови узгодження фаз першого і останнього ланок $\phi_{n-1} = \phi_0 + 2\pi N$ (див. рауваження після формули (41)).

На рисунку 2.14 представлені інтенсивності і фази спіральних пучків у вигляді кордонів правильного трикутника і квадрата. При обчисленні поля (44) для трикутника в якості породжує кривої $\zeta(t)$ використовувалася гіпоциклоїда

$$\zeta(t) = iv\rho \left[2 \exp(it) + \frac{1}{2} \exp(-2it) \right], \quad t \in [0, 2\pi]$$

Значення $v = \sqrt{N/7}$ відповідає N -квантованій кривій. Для квадрата породжує крива - епіциклоїда

$$\zeta(t) = iv\rho \left[3 \exp(it) - \frac{7}{20} \exp(-3it) \right], \quad t \in [0, 2\pi]$$

а N -квантованна крива виходить при $v = \sqrt{200N/3453}$. Спіральні пучки, показані на рисунку, побудовані для 7-квантованої гіпоциклоїди і 8-квантованої епіциклоїди. Площі областей, обмежених цими кривими, рівні відповідно $(7/2)\pi\rho^2$ і $4\pi\rho^2$. На фазових розподілах видно наявність сингулярності (ізолюваних нулів інтенсивності), кількість яких всередині відповідних областей дорівнює 7 і 8.

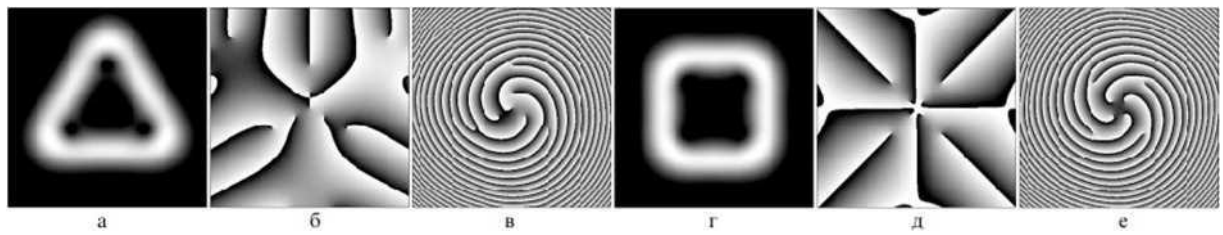


Рисунок 2.14. Розподіл інтенсивності (а, г) і фази (б, д), а також фази поза перетяжки (в, е) спіральних пучків в формі кордонів правильного трикутника і квадрата.

Інтенсивність і фаза спірального пучка на породжує кривої.

Пучки, побудовані для квантованих кривих, мають характерний властивістю. Нехай $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$, - замкнута крива, яка задовольнить умові (46). Тоді $J(\zeta(t_0), \zeta'(t_0) | \zeta(t), t \in [0, T]) \neq 0$ для всіх $t \in [0, T]$.

Для аналізу цього твердження розглянемо за допомогою методу перевалу [31] асимптотичну поведінку пучків $J(z, \hat{z} | v\zeta_1)$ при великих значеннях параметра v , де ζ_1 - довільна 1-квантована крива без самоперетинів. Тут і далі використовується спрощена запис $J(z, \hat{z} | \zeta)$ для спірального пучка, якщо крива ζ не вимагає деталізації.

Зробимо заміну $z \rightarrow v\zeta$. Тоді

$$\mathcal{J}(v\zeta, v\bar{\zeta} | v\zeta_1) = v \int_0^T \exp \left[-\frac{v^2}{\rho^2} P(t) \right] |\zeta_1'(t)| dt \quad (47)$$

Рівняння на точки перевалу

$$P'(t) = 2\bar{\zeta}_1'(t) [\zeta_1(t) - z] = 0$$

в силу відсутності особливих точок ($\zeta_1'(t) \neq 0$ для всіх t) і самоперетинів ($\zeta_1(t_1) \neq \zeta_1(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$ і $t_1, t_2 \in [0, T]$) має рішення лише для $z \in \zeta_1(t)$, $t \in [0, T]$. Нехай $z = \zeta_1(t_0)$ при деякому $t_0 \in [0, T]$ і нехай $v = \sqrt{n} \gg \rho$. Тоді $\sqrt{n} \zeta_1(t)$ є n -квантована крива. Оскільки $t = t_0$ є єдиною точкою перевалу, то

$$(\sqrt{n} \zeta_1(t_0), \sqrt{n} \bar{\zeta}_1(t_0) | \sqrt{n} \zeta_1) = \sqrt{\pi} \rho \exp \left[\frac{n}{\rho^2} \int_0^{t_0} (\bar{\zeta}_1 \zeta_1' - \zeta_1 \bar{\zeta}_1') d\tau \right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (48)$$

З (48) видно, що в межі при $n \rightarrow \infty$ інтенсивність прагне до $\pi \rho^2$, і, отже, починаючи з деякого n (залежить, звичайно, від виду кривої ζ_1), справедливо нерівність $J(\sqrt{n} \zeta_1(t_0), \sqrt{n} \bar{\zeta}_1(t_0) | \sqrt{n} \zeta_1) \neq 0$. Зауважимо, що з ростом n розподіл

інтенсивності на кривій $\sqrt[n]{\zeta_1(t)}$ стає все більш однорідним, а відсутність сідлових точок для $z \in \{\zeta_1(t), t \in [0, T]\}$ призводить до падіння інтенсивності спірального пучка поза кривою $\sqrt[n]{\zeta_1(t)}$. Таким чином, асимптотичну поведінку інтенсивності спірального пучка надає сувору фізичну основу висловом «пучок в формі кривої $\zeta(t)$ »

Для $v \neq \sqrt[n]{n}$ (тобто для неквантованої кривої $v\zeta_1(t)$) асимптотична оцінка подібна формулі (48), якщо точка t_0 не схильна в безпосередній близькості від граничних точок. Однак якщо $t_0 = T$ (або $t_0 = 0$), то підінтегральна функція в (47) не є T -періодичною і замінювати відрізок інтегрування $[0, T]$ на $[t_0 - T/2, t_0 + T/2]$ не можна. У зв'язку з цим слід розглядати точки $t = 0$ і $t = T$ як два різних рішення рівняння на точки перевалу, і асимптотична оцінка набуде вигляду

$$\mathcal{S}(v\zeta_1(T), v\bar{\zeta}_1(T)|v\zeta_1) = \sqrt{\pi} \rho \frac{1 + \exp(2\pi i v^2)}{2} + O\left(\frac{1}{v^2}\right) \quad (49)$$

З цього виразу випливає, що для $v \neq \sqrt[n]{n}$ інтенсивність на кривій $v\zeta_1(t)$ не прагне при $v \rightarrow \infty$ до константи $\pi \rho^2$ і, крім того, місце неоднорідності інтенсивності на кривій $v\zeta_1(t)$ визначається початковою точкою інтегрування. На рисунку 2.15 показані варіанти зміни розподілу інтенсивності неквантованого спірального пучка трикутної форми в залежності від вибору початкової точки інтервалу інтегрування.

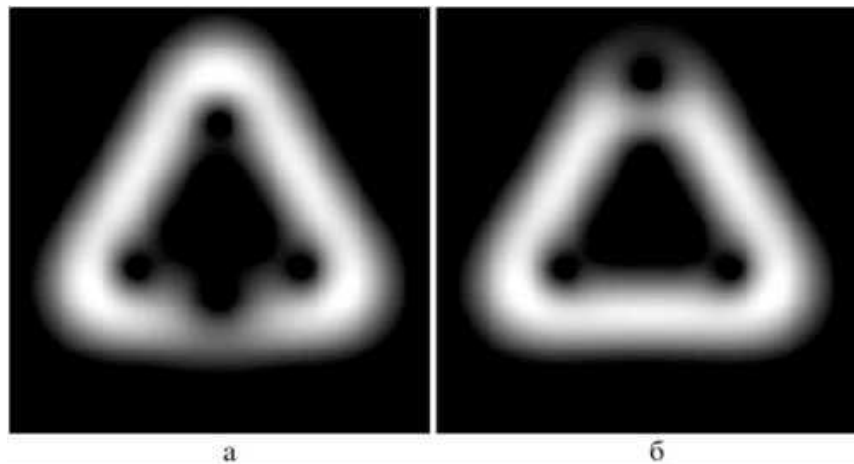


Рисунок 2.15. Інтенсивності спіральних пучків (44), побудованих для

неквантованної гіпоціклоїди трикутного виду
$$\zeta(t) = 1,0425i\rho \left[2 \exp(it) + \frac{1}{2} \exp(-2it) \right]$$

і різних інтервалів інтегрування: (а) $t \in [-\pi, \pi]$, $t \in [0, 2\pi]$. Параметр 1,0425 знаходиться між 1 і $\sqrt{8/7}$, що відповідає проміжному положенню між 7- і 8-квантованими кривими.

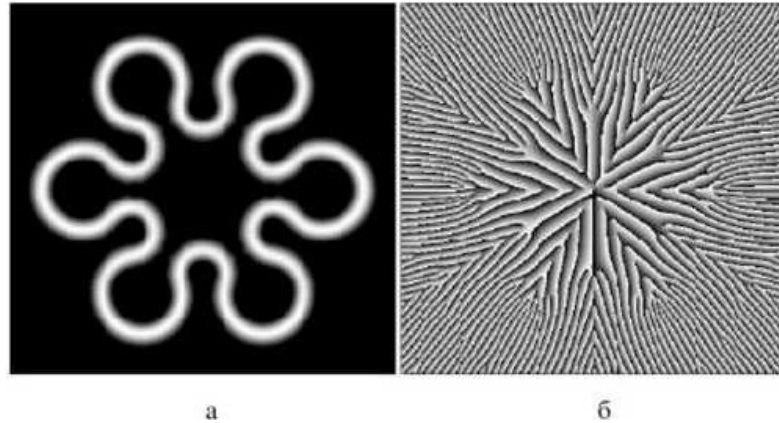


Рисунок 2.16. Інтенсивність (а) і фаза (б) спірального пучка, побудованого по 97-квантованій кривій в формі сніжинки.

Відзначимо ще раз асимптотичний характер отриманих виразів. Більш детальний аналіз формули (49) дозволяє підсилити твердження щодо порядку залишкового члена, однак питання суворого доказу нерівності

$$\mathcal{S}(\sqrt{n}\zeta_1(t_0), \sqrt{n}\bar{\zeta}_1(t_0)|\sqrt{n}\zeta_1) \neq 0 \text{ для всіх } n \geq 1 \quad (50)$$

все ще залишається відкритим. Навіть при виконанні умови квантування вираз в лівій частині останнього нерівності невіддільне від нуля (тобто нульова константа не може бути замінена на трохи більшу). Основна проблема полягає в ефективному використанні умови відсутності точок самопересечення у породжує кривої. На рисунку 2.16 наведено приклад спірального пучка, який ілюструє цю трудність. У тих місцях, де ділянки кривої майже торкаються один одного, присутні нулі підходять дуже близько до породжує кривої, і тільки умова відсутності точок самопересечення заважає нулям розташуватися на самій кривій і тим самим перетворити нерівність (50) в рівність.

Число нулів спірального пучка всередині області, обмеженої породжує кривої. Розглянемо циркуляцію градієнта фази квантованого пучка $J(z, \hat{z}|\sqrt{N}\zeta_I) = \sqrt{I(x, y)} \exp[i\phi(x, y)]$ уздовж свого породжує контуру. Як впливає з

[17, 32] і відзначено у вступі,

$$\oint_{\sqrt{N}\zeta_1} \nabla \varphi \, d\mathbf{r} = 2\pi \sum_n \text{sgn} \, \text{rot}_0 \mathbf{j}(z_n) \quad (51)$$

де скалярная функція

$$\text{rot}_0 \mathbf{j} = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

є поздовжня складова ротора вектора потоку світлової енергії \mathbf{j} і підсумовування проводиться по всіх нулях z_n спірального пучка, що знаходяться всередині контуру $\sqrt{N} \zeta_I(t)$ з урахуванням кратності.

Для спіральних пучків (44), як і для загальних пучків (33), $\text{rot}_0 \mathbf{j}(z_n) = -\text{sgn} \, \theta_0 = 1$, тому

$$\oint_{\sqrt{N}\zeta_1} \nabla \varphi \, d\mathbf{r} = 2\pi N_0$$

де N_0 - кількість нулів пучка $J(z, \bar{z} | \sqrt{N} \zeta_I)$ всередині контуру $\sqrt{N} \zeta_I(t)$ з урахуванням їх кратності.

Покажемо, що

$$N_0 = N \quad (52)$$

Оскільки $N = 2S/\pi\rho^2$, то рівність (52) пов'язує число нулів квантованого пучка в області, обмеженою породжує кривої, з площею самої області.

З умови квантування для окружності $S = \pi R^2 = \pi \rho^2 N/2$ слід $2R^2/\rho^2 = N$ і ряд зводиться до одного N -му члену:

$$\mathcal{S}\left(z, \bar{z} \left| \rho \sqrt{\frac{N}{2}} \exp(it), t \in [0, 2\pi] \right. \right) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \left(\frac{z}{\rho}\right)^N \quad (53)$$

Таким чином, квантовими спіральними пучками для окружності є відомі пучки Лагерра-Гаусса. Справедливість рівності (52) в цьому випадку очевидна.

Припустимо тепер, що існує деяка N -квантованими крива $\zeta(t)$, для якої не виконується рівність (52). Тоді побудуємо сімейство замкнутих кривих $\zeta(t, s)$, що залежить від параметра $s \in [0, 1]$, яке починається з N -квантованим окружності

$$\zeta(t, 0) = \rho \sqrt{\frac{N}{2}} \exp(it)$$

закінчується кривою $\zeta(t, 1) = \zeta^*(t)$ і має фіксовану площу обмеженої області $S = \pi \rho^2 N/2$ для кожної кривої $\zeta(t, c)$. Це гарантує виконання умови квантування (46) для всіх $c \in [0, 1]$ при безперервній деформації окружності. Однак спіральний пучок для окружності задовольняє умові (52), а спіральний пучок для кривої $\zeta(t)$ немає. Тому при деякому з числа нулів N -квантованого спірального пучка $J(z, \hat{z}|\zeta(t, c))$ в області, що обмежується контуром $\zeta(t, c)$, має змінитися. Щодо механізму зміни кількості нулів спірального пучка при зміні породжує кривої справедливі такі міркування. Нулі спірального пучка є нулі відповідної аналітичної функції. З принципу максимуму модуля [33] випливає, що модуль аналітичної функції не має мінімуму всередині області, якщо тільки цей мінімум не є нуль функції. Отже, ніякої нуль не може виникнути з мінімуму модуля функції або трансформуватися в мінімум всередині області при зміні параметра c , оскільки ніякого такого мінімуму для аналітичної функції не існує. Тому зміна числа нулів є результат проникнення нуля зовні області, обмеженої контуром $\zeta(t, c)$, всередину або навпаки. Але в такому випадку існує таке значення параметра $c = c_0$, при якому спіральний пучок $J(z, \hat{z}|\zeta(t, c_0))$ має нуль на контурі $\zeta(t, c_0)$, що, як уже зазначалося, неможливо.

Таким чином, квантованим пучку відповідає строго певну кількість фазових сингулярностей всередині області, обмеженої породжує кривої, яке залежить від площі області, але не від її форми [28]. Звідси випливає, що при зміні площі області, наприклад, від $S = \pi \rho^2 N/2$ до $S = \pi \rho^2 (N+1)/2$ відбувається збільшення числа нулів всередині області за допомогою приходу одного нуля ззовні.

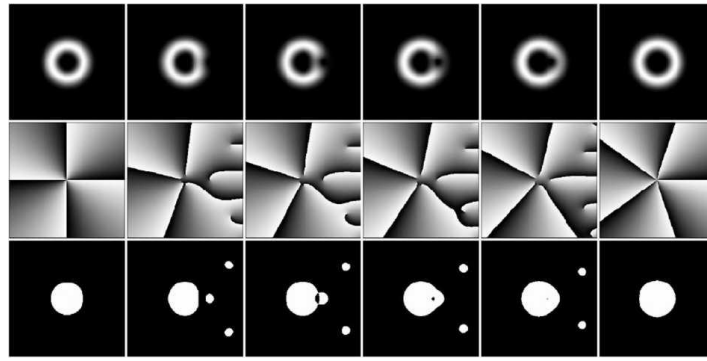


Рисунок 2.17. Еволюція спірального пучка при зміні радіуса породжує кола: інтенсивність (верхній ряд), фаза (середній ряд) і знак ротора $\text{rot}_0 \mathbf{j}$ вектора потоку світлової енергії (нижній ряд). Чорний колір відповідає від'ємним показникам ротора, білий – позитивним.

На рисунку 2.17 показана еволюція спірального пучка для кола $\zeta(t) = R \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, при $2R^2/\rho^2 \in [4, 0; 5, 0]$ і видно процес проникнення нуля всередину контура. Обмежені розміри графічних зображень не дозволяють разом зі змінами в центрі кільця побачити, що відбувається в цей час на периферії. Зі збільшенням радіуса R породжує кола, коли спіральний пучок перестає бути квантованим і вироджених нуль в центрі розпадається на чотири простих, на нескінченності утворюється клин нулів, який у міру зростання R все ближче і ближче підходить до цієї четвірки. Ноль, що знаходиться на вістрі клина, впроваджується всередину кола, обмеженого породжує окружністю, інші нулі залишаються зовні. Після цього починається одночасне зближення внутрішньої п'ятірки нулів і видалення від них клина нулів, що втратив одного свого представника. Коли спіральний пучок знову стає квантованим, нулі в центрі зливаються в нуль п'ятого порядку, а клин зникає на нескінченності. Зона проникнення нуля, як було сказано вище, визначається точкою початку інтегрування.

Спіральні пучки для симетричних кривих.

Симетрія замкнутих кривих проявляється у властивостях відповідних спіральних пучків. Нехай крива $\zeta(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, переходить в себе при повороті на кут $2\pi / M$, тобто $\zeta(t+2\pi/M) = \zeta(t) \exp(2\pi i/M)$. Тоді квантовані

спіральні пучки $J(z, \hat{z}|\zeta_n)$, побудовані за відповідними квантованим кривим $\zeta_n(t)$, мають такі властивості:

а) $J(z \exp(2\pi i/M), \hat{z} \exp(-2\pi i/M)|\zeta_n) = J(z, \hat{z}|\zeta_n) \times \exp(2\pi i n/M)$;

б) $J(z, \hat{z}|\zeta_n)$ має в точці $z = 0$ нуль кратності $n - [n/M]M$. Якщо $n \geq M$, то інші нулі, знаходячись всередині контуру $\zeta_n(t)$, розташовані в вершинах правильних M -кутників (одного або декількох). Наприклад, $M = 3$ для гіпоціклоїди Δ_7 :

$$\zeta(t) = i\rho \left[2\exp(it) + \frac{1}{2}\exp(-2it) \right], \quad t \in [0, 2\pi]$$

Тому пучок $J(z, \hat{z}|\Delta_7)$ містить простий нуль в точці $z = 0$ і шість інших в вершинах двох правильних трикутників (див. рис. 14а-в);

в) якщо $n - m$ не ділиться на M , то пучки $J(z, \hat{z}|\zeta_n)$ і $J(z, \hat{z}|\zeta_m)$ ортогональні в просторі $L_2(\mathbf{R}^2)$. Цей результат добре відомий, оскільки є окремим випадком ортогональності мод Лагерра-Гауса.

Спіральні пучки як узагальнення мод Лагерра-Гауса.

Згідно (53) моди Лагерре - Гауса $L_{0,n}(x, y) = \exp(-x^2 - y^2) (x + iy)^n$ є окремий випадок квантованих спіральних пучків, коли в якості породжує кривої вибирається окружність. Можна отримати все сімейство мод Лагерра-Гауса в термінах породжують кривих. Для цього перепишемо вираз (20) при $l = 0$ в наступному вигляді:

$$\mathcal{S}_m(z, \bar{z}) = \exp(Z\bar{Z}) \frac{\partial^m}{\partial Z^m} (\exp(-2Z\bar{Z}) f(Z)) = \left(\rho \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\bar{z}}{\rho} \right)^m \mathcal{S}(z, \bar{z}) \quad (54)$$

Тут $z = x + iy$, $Z = z/\rho$, $J(z, \hat{z}) = \exp(-z\hat{z}/\rho^2) f(z/\rho)$ і замість N використовується позначення m . Відзначимо, що оператор, який діє на $J(z, \hat{z})$, є оператор народження для гамільтониана, що описує рух частинки в однорідному магнітному полі [34].

Таким чином, спіральні пучки у вигляді замкнутих кривих можна розглядати як узагальнення пучків Лагерра-Гауса $L_{0,n}(x, y)$. Цю аналогію можна продовжити і побудувати для кожної породжує кривої сімейство спіральних пучків, відповідне повного сімейства пучків Лагерра-Гауса. Для

цього в поданні (54) в якості поля $J(z, \bar{z})$ виберемо n -квантований спіральний пучок у формі довільної породжує кривої $\zeta(t)$. Тоді отримане поле матиме вигляд

$$\mathcal{S}_m(z, \bar{z}|\sqrt{n}\zeta_1) = \left(\rho \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\bar{z}}{\rho} \right)^m \mathcal{S}(z, \bar{z}|\sqrt{n}\zeta_1) \quad (55)$$

Тут, як і раніше, $\zeta_1(t)$ - 1-квантована крива. Пучки (55) повертаються при поширенні, як і вихідний пучок $J(z, \bar{z}|\sqrt{N}\zeta_1)$, так як мають той же параметр обертання $\theta_0 = -1$. Крім того, вони успадковують риси породжує кривої. Приклади пучків Лагерра-Гауса і відповідних спіральних пучків для 7-квантованої гіпоціклоїди трикутної форми наведено на рис. 18. Цікаво відзначити, що, на відміну від пучків Лагерре - Гаусем, лінії низької інтенсивності вже не є нульовими лініями і дана структура інтенсивності забезпечується лише ізольованими нулями, мають досить складний вид і імітують нульові лінії інтенсивності.

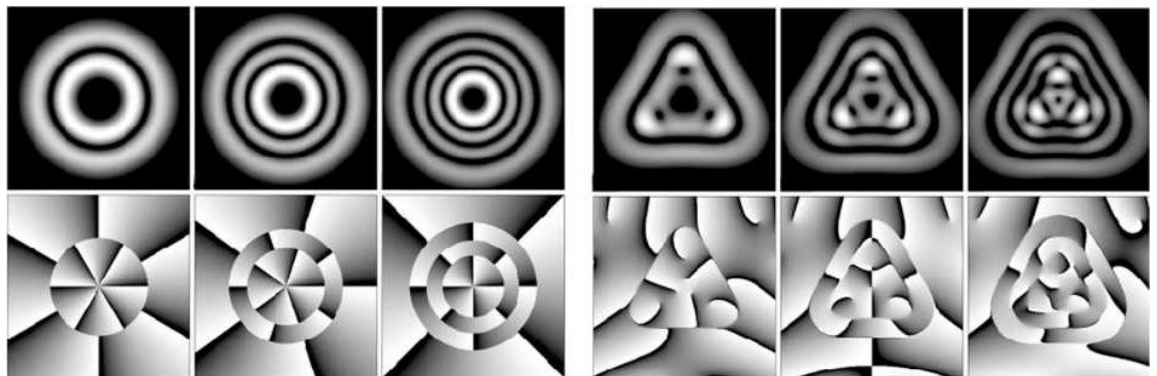


Рисунок 2.18. Інтенсивності і фази пучків Лагерра-Гауса $L_{m, 1-m}(x, y)$ і спіральних пучків $J_m(z, \bar{z}|\Delta_7)$ в () при $m = 1, 2, 3$.

2.2.3. Методи синтезу структурно-стійких пучків із заданим розподілом інтенсивності

Метод амплітудно-фазової маски.

Експериментальна реалізація спіральних пучків (44) здійснювалася наступним чином [28]. Розраховані на комп'ютері амплітудні напівтонові маски для амплітуди і фази були зроблені на фотоплоттері (роздільна

здатність 1024 x 1024 елементів, розмір 10 x 10 мм). Амплітудна маска фази використовувалася для виготовлення фазового елемента на біхромірованому желатині. Комбінація амплітудної A і фазової P масок дає необхідну амплітудно-фазовий розподіл. Для реалізації спірального пучка трикутного виду (рис. 2.14а, в) було використано фазовий розподіл, показане на рис. 2.14в, оскільки його просторова частота вище, ніж у розподілу на рис. 2.14б. Крім того, на фазовий розподіл в перетягуванні пучка накладалася квадратична фазова добавка з кривизною хвильового фронту $0,002 \text{ мм}^{-1}$ для збільшення дифракційної ефективності фазового елемента.

Схема експерименту наведена на рис. 2.19а. Пучок від лазера L розширюється і висвітлює амплітудно-фазовий елемент AP (елемент був повернутий на 90° в порівнянні з розподілом, показаним на рис. 2.14). Лінза 3 ($f=250 \text{ мм}$) здійснює фокусування $+1$, 0 , -1 порядків дифракції в площині $+1$, 0 , -1 відповідно. Дифракційна ефективність в цих порядках була наступною: $\eta_1: \eta_2: \eta_3 \approx 10:7:3$, $\eta_1 \approx 40\%$.

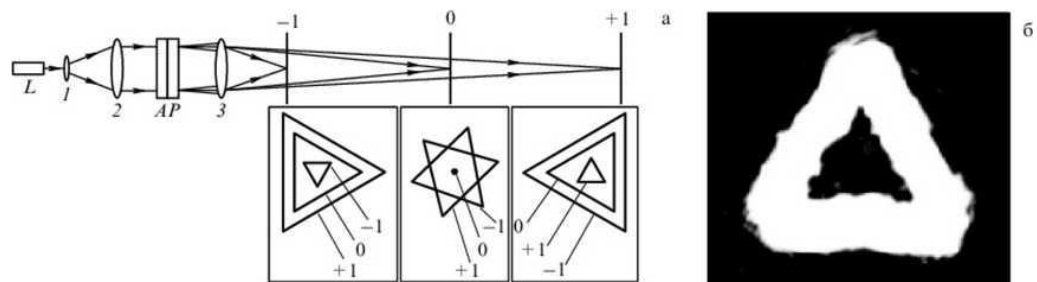


Рисунок 2.19. Схема експерименту для синтезу спірального пучка в формі кордону правильного трикутника (а) і зареєстроване розподіл інтенсивності в порядку дифракції $+1$ (б).

Схематично картина розподілів інтенсивності в площинах 0 , ± 1 показана в нижній частині малюнка. У порядках $+1$ і -1 реалізуються спіральні пучки, що обертаються в протилежні сторони: $J_{+1} = \exp(-z\hat{z})f(z)$, $J_{-1} = \exp(-z\hat{z})\bar{f}(z)$, У нульовому порядку спостерігається звичайна картина дифракції на амплітудном транспаранті A . Це поле не є спіральним пучком і при фокусуванні в площині 0 не зберігається свою структуру. на рисунку 2.19б представлено експериментальне розподіл інтенсивності в порядку дифракції $+1$ на площині $+1$.

Метод астигматичного перетворення.

Розглянемо тепер інший спосіб реалізації спіральних пучків у вигляді кривих, заснований на використанні астигматичного перетворення (26) пучків Ерміта-Гауса в пучки Лагерра - Гауса. Його окремий варіант дає можливість синтезу спіральних пучків $\exp(-z\bar{z}) z^n$ і може бути узагальнено наступним чином:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}^2} \exp \left[-i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2} - \frac{\eta^2}{\rho^2} \right] g\left(\frac{\xi}{\rho}\right) d\xi d\eta = \\ = \sqrt{\pi} \rho^2 \exp \left(-\frac{i\rho^2 xy}{4} \right) \mathcal{S}(\rho(x + iy), \rho(x - iy)) . \end{aligned} \quad (56)$$

Використовуючи перетворення (56), можна запропонувати наступну послідовність дій для експериментального синтезу спіральних пучків:

- а) для деякої функції $g(\zeta)$ сформувати світлове поле $\exp(-\eta^2/\rho^2)g(\zeta/\rho)$;
- б) виконати астигматичного перетворення даного поля;
- в) компенсувати астигматизм після перетворення.

Наприклад, для $g(\zeta) = \text{rect}(\zeta/a)$ реалізується спіральний пучок-«нотрезок», подібний зображеному на рис. 2.20. Тоді для

$$g(\xi) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{a}\right) \sum_{n=-N}^N \exp(in\omega\xi)$$

отриманий спіральний пучок буде мати вигляд $2N + 1$ паралельних вертикальних пучков- "відрізків":

$$\mathcal{S}_N(z, \bar{z}) = \sum_{n=-N}^N \exp\left(-\frac{1}{8}z\bar{z} + \frac{1}{8}z^2\right) \times \int_{-a}^a \exp[-\xi^2 - i\xi(z - n\omega)] d\xi \quad (57)$$

При $w \sim w_0 = 2\sqrt{\pi}$ окремі пучки "сліпаються" і пучок (57) приймає форму симетричною по x, y решетки нулів (рис. 20а, б). Частота w_0 виходить з таких міркувань.

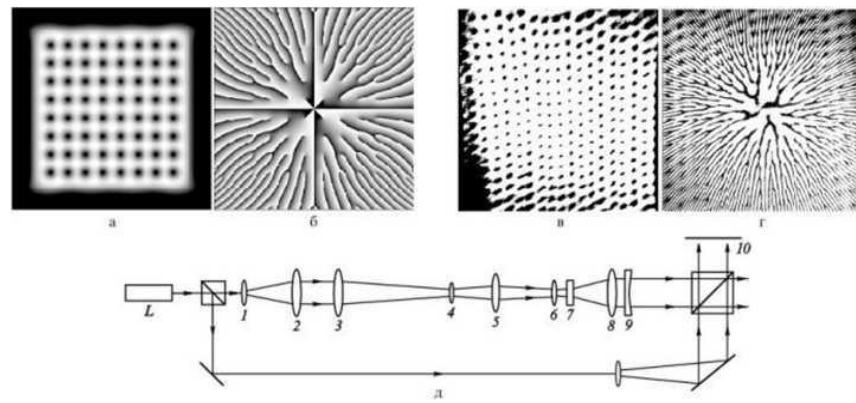


Рисунок 2.20. Теоретичні розрахунки і еспериментальна реалізація спіральних пучків в формі решітки нулів, а також оптична схема (д) для синтезу таких пучків. Інтенсивність (а) і фаза (б) спірального пучка (теорія); інтенсивність (в) і результат інтерференції між спіральним і опорним пучками (г) (експеримент).

Пучок (57) був реалізований за допомогою решітки Даммана з просторовою частотою w_0 як мультиплікуючого елемента. Схема експерименту показана на рис. 2.20д. Пучок, що виходить з лазера розширюється і колімується сферичними об'єктивами 1, 2. Циліндричні об'єктиви 3, 4 стискають пучок в одному напрямку і разом з астигматичним перетворювачем, що складається з сферичного 5 і циліндричного 6 об'єктивів, формують поле виду $\exp(-\eta^2/\rho^2) \text{rect}(\zeta/a) \exp(2i\zeta\eta/\rho^2)$. Безпосередньо за циліндричним об'єктивом 6 розташовувалася дифракційна решітка 7. дає 17 порядків однакової інтенсивності. За решіткою астигматичного перетворення (56) реалізовувалося в зоні Фраунгофера і розподіл інтенсивності вихідного пучка виглядало як решітка нулів. Компенсація астигматизму на виході з перетворювача здійснювалася комбінацією з довгофокусних циліндричних збирає 8 і розсіює 9 лінз. Друге плече схеми використовувалося для інтерферометричної візуалізації фази спірального пучка на екрані 10. При цьому кривизна опорного фронту підбиралася рівною кривизні пучка з перетворювача. Результати експерименту представлені на рис. 2.20в, г. Як видно з рис. 20г. в кожному ізольованому нулі відбувається розгалуження інтерференційної смуги, що відповідає особливості фази в цій точці. У всіх нулях інтенсивності значення

ротора вектора потоку світлової енергії мають однаковий знак (однаковий топологічний заряд). Спотворення структури вихровий решітки в експерименті в порівнянні з теоретичним розподілом обумовлено наявністю деяких залишкових аберацій.

На основі астигматичного перетворення можливий ще один, споріднений попереднього, спосіб формування спіральних пучків. Нехай, $J_m(z, \hat{z})$ - пучок виду (54). Тоді справедливо наступне рівність:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}^2} \exp \left[-i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2} \right] \mathcal{S}_m(\xi + i\eta, \xi - i\eta) d\xi d\eta = \\ = \frac{\pi\rho^2}{\sqrt{2}} \left(\frac{i}{\rho} \right)^m \exp \left(-\frac{i\rho^2 xy}{4} - \frac{\rho^2 x^2}{8} \right) H_m \left(\frac{\rho x}{2} \right) h(y) \end{aligned} \quad (58)$$

де $H_m(t)$ - поліном Ерміта і

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{\rho^2 y^2}{8} \right) \int_{\mathbf{R}} \exp(-t^2) f \left(\frac{\rho y}{2} + it \right) dt \quad (59)$$

Легко бачити, що вся інформація про структуру спірального пучка закладена в $h(y)$, яка є функцією однієї змінної. Таким чином, ця функція здійснює своєрідне одномірне кодування двовимірного спірального пучка.

Для синтезу спіральних пучків за допомогою кодировочних функцій можна запропонувати наступний метод:

- а) синтезувати одновимірний амплітудно-фазовий елемент $h(y)$;
- б) здійснити "відновлення" інтенсивності спірального пучка астигматичним одновимірним пучком Ерміта Гауса

$$\exp \left(-\frac{i\rho^2 xy}{4} - \frac{\rho^2 x^2}{8} \right) H_m \left(\frac{\rho x}{2} \right)$$

в далекій зоні дифракції або в фур'є-площині.

На рисунку 2.21 показані амплітудно-фазові елементи, відповідні спіральним пучків трикутної форми в залежності від кута повороту породжує кривої. Як породжує кривої використовувалася 7-квантованими гіпоціклоїда, спіральний пучок для якої показаний на рис. 2.14.

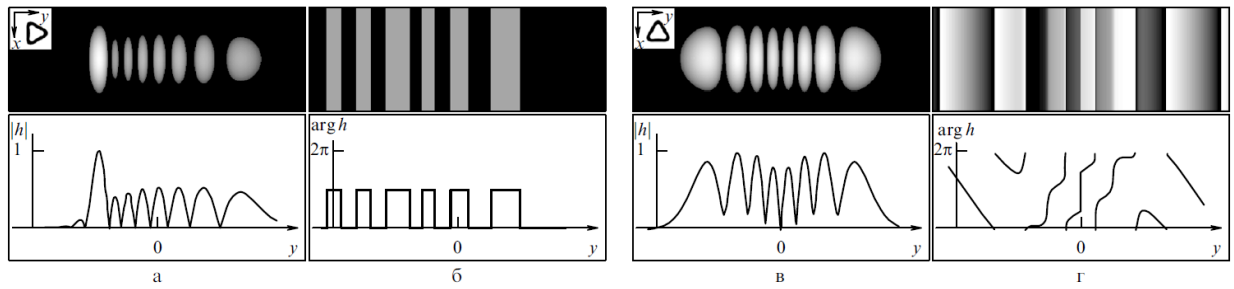
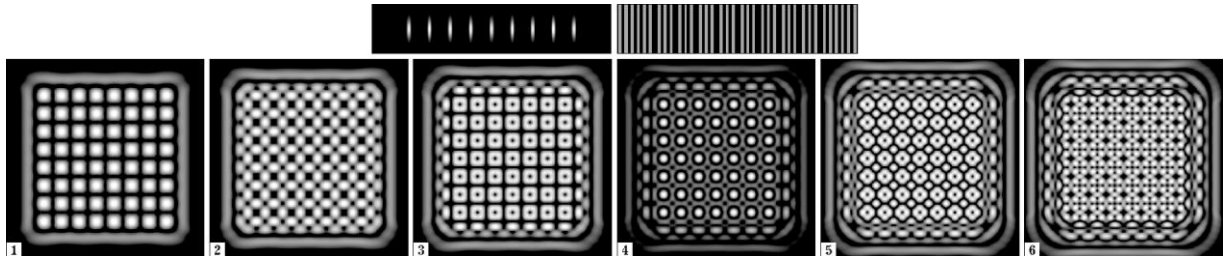


Рисунок 2. 21. Амплітудно-фазові елементи для спірального пучка трикутної форми в залежності від кута повороту породжує криві.

На рисунку 2.21а, б представлені амплітуда (а) і фаза (б) розподілу $\exp\left(-\frac{\rho^2 x^2}{8}\right) h(y|\triangleright_7)$

а також графіки амплітуди і фази одновимірної функції $h(y|\triangleright_7)$ - На рисунку 2.21 в. г наведено аналогічний амплітудно-фазовий елемент для 7-квантованної гіпоціклоїди, поверненою на 90° На відміну від попереднього розподілу, яке було чисто речовим, елемент $h(y|\Delta_7)$ вже є комплексно значною.



Рисунку 2.22. Верхній ряд: амплітуда і фаза кодувального елемента для спірального пучка $J(z, \hat{z} | \Xi_{8 \times 8})$ (рис. 20а. б). Нижній ряд: інтенсивності спіральних пучків $J_m(z, \hat{z} | \Xi_{8 \times 8})$. побудованих за формулою (54) при $1 \leq m \leq 6$.

Амплітудно-фазовий елемент для спірального пучка в формі решітки нулів наведено на рис. 2.22. Як видно з рисунка, кодувочна функція для решітки нулів штучна (це можна довести і теоретично). Оскільки кодувочная функція для квантованної окружності також матеріальна, то будь-який пучок у формі решітки нулів може бути отриманий за допомогою астигматичного перетворення твори одновимірних дійсних функцій. Одновимірна структура амплітудно-фазових копіювальних елементів

дозволяє в повній мірі використовувати можливості мікролітографії. тому даний спосіб може бути технологічно більш кращий, ніж метод амплітудно фазової маски.

На закінчення даного розділу розглянемо зв'язок отриманих пучків з деякими відомими перетвореннями.

1. Звернемося до астигматичного перетворенню (56) і перепишемо отриманий спіральний пучок $J(z, \bar{z})$ у вигляді

$$\mathcal{S}(2iz, -2i\bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2}\right) \times \int_{\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{z^2}{2} + 2z\xi - \xi^2\right) g(\xi) d\xi = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2}\right) f(z)$$

В результаті маємо перетворення Габора [35] функції $g(\zeta)$, в якому аналітична функція $f(z)$ пов'язана з $g(\zeta)$ за допомогою інтегрального перетворення з ядром $\exp(-z^2/2 + 2z\zeta - \zeta^2)$. Крім того, в квантовій механіці [29] зв'язок між координатним представленням стану $|q\rangle$ і поданням Фока-Баргмана $\langle z|$ здійснюється інтегральним перетворенням з ядром

$$\langle z|q\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{z^2}{2} + \frac{2zq}{\sqrt{2\hbar}} - \frac{q^2}{2\hbar}\right)$$

Таким чином, астигматичного перетворення (56) реалізує оптичним шляхом зв'язок двох квантовомеханичних уявлень.

2. З (56) слід також можливість оптичної реалізації аналітичного продовження Фур'є-образу поля $g(\zeta)$ за допомогою астигматичного перетворення. Наприклад, для фінітного поля $g(\zeta)$ з носієм $[-a, a]$ послідовність дій наступна. Спочатку поле $g(\zeta)$ пропускається через амплитудну маску $\exp(-a^2 + \zeta^2 - \eta^2)$ і астигматичного фазовий елемент $\exp(2i\zeta\eta)$. Потім здійснюється оптичне перетворення Фур'є. Нулі вихідного поля є нулі аналітичного продовження Фур'є-образу поля $g(\zeta)$. Отримане аналітичне продовження може бути використано в якості основи нового методу відновлення фази [36].

3. Еволюція поля з (59) при поширенні має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
F(x, y, l) &= \frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbf{R}^2} \exp \left\{ \frac{ik}{2l} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} \times F(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta = \\
&= \frac{1}{\sigma} \exp \left[\frac{i l \rho^4 (x^2 + y^2)}{32 k |\sigma|^2} \right] \exp \left(-\frac{\rho^2 y^2}{8 |\sigma|^2} \right) \times h \left(\frac{\rho x}{|\sigma|} \middle| \zeta \exp(i \arg \sigma) \right)
\end{aligned} \tag{60}$$

Тут $\sigma = 1 + i l \rho^2 / 4k$. Порівнюючи (59) і (60), знаходимо, що для кожного l вищенаведене поле $F(x, y, l)$ з точністю до масштабу і фазового множника збігається з астигматичним перетворенням спірального пучка $J(z \exp(-i \arg \sigma), \hat{z} \exp(i \arg \sigma) | \zeta)$, який виходить з вихідного спірального пучка поворотом на кут $\arg \sigma$.

Перетворенню (60) і відповідного астигматичного перетворенню можна дати геометричну інтерпретацію. Розглянемо тривимірне комплексне розподіл (див. також [56, 59])

$$W(x, u, y) = \exp \left(-\frac{2ixu}{\rho^2} - \frac{2y^2}{\rho^2} \right) \mathcal{S}(x + iu, x - iu | \zeta)$$

Проекція цього розподілу на площину $u = 0$

$$W_{PR}(x, y) = \int_{\mathbf{R}} W(x, u, y) du = \sqrt{\pi} \exp \left(-\frac{2y^2}{\rho^2} \right) h \left(\frac{4x}{\rho} \middle| \zeta \right)$$

Ця проекція з точністю до масштабу збігається з $F(x, y, 0)$. Відповідно при повороті розподілу $W(x, u, y)$ на кут $\arg \sigma$ навколо осі u його проекція на площину $u = 0$ з точністю до масштабу і фазового множника збігається з $F(x, y, l)$. Таким чином, еволюція поля $F(x, y, l)$ при поширенні виглядає як зміна проекції $W(x, u, y)$ при його обертанні навколо осі u .

2.2.4. Синтез фазових елементів для фокусування в криві

Спіральні пучки в силу своєї структурної стійкості завжди є амплітудно-фазовими, але не чисто фазовими світловими полями. Тому внерезонаторні методи синтезу світлових полів як перетворення деякого вихідного поля за допомогою амплітуднофазових оптичних елементів неминуче пов'язані з втратою істотної частки енергії перетвореного поля. Це робить такі методи неоптимальними для прикладних задач. Разом з тим

структурна стійкість поля при поширенні і фокусуванні не завжди є необхідною: цілком достатньо домогтися ефективного перетворення вихідного світлового поля в поле з заданим розподілом інтенсивності і в деякій площині. Тому природна постановка задачі: "обміняти" структурну стійкість спірального пучка на можливість формування заданого розподілу інтенсивності в певній площині чисто фазовим оптичним елементом.

Завдання синтезу фазових елементів для формування світлових полів із заданим розподілом інтенсивності (фокусаторов) відома і має вже свою історію і бібліографію (див., наприклад, [37]). У математичному плані завдання фокусування лазерного випромінювання зводиться до знаходження деякої кусково-гладкою фазової функції $\exp[i\varphi(\xi, \eta)]$. перетворення Френеля від якої при $l = l_0$ дасть необхідний розподіл інтенсивності $I(x, y)$:

$$I(x, y) = |F(x, y)|^2 = \left| \frac{k}{2\pi i l_0} \iint_{\Omega} \exp \left\{ \frac{ik}{2l_0} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} \times \exp [i\varphi(\xi, \eta)] d\xi d\eta \right|^2 \quad (61)$$

Тут Ω – апертура оптичного елемента.

Необхідно також відзначити, що вираз "необхідний розподіл інтенсивності $I(x, y)$ " потрібно розуміти не в сенсі аналітичного представлення функції I . а дещо ширше. Так, наприклад, очевидно, що завдання фокусування (61) при $I(x, y) = \text{rect}(x/a) \text{rect}(y/b)$ не має рішень за жодних позитивних a і b , оскільки для будь-якого поля кінцевих розмірів інтенсивність $I(x, y)$ є цілою аналітичною функцією але обом змінним. Проте завдання фокусування в прямокутник із співвідношенням сторін a/b - одна з найпоширеніших [37, 38].

У зв'язку з цим при фокусуванні лазерного випромінювання в криву L . (інший широко розглядається випадок - двовимірна область) передбачається, що розподіл інтенсивності $I(x, y)$ має бути максимально в точках кривої L або деякої її ε - околиці (розмір ε багато менше довжини L), а сукупна частка енергії в цій околиці якомога ближче до 100 %. Крім того, більш-менш однорідний розподіл інтенсивності на кривій L ще одним важливим моментом, який повинен враховуватися при вирішенні задачі. Підсумовуючи

все сказане, можна вважати, що завдання фокусування лазерного випромінювання в деяку криву L вирішена, якщо в результаті фокусування елементом $\exp[i\varphi(\zeta, \eta)]$ інтенсивність $I(x, y)$ на площині $l = l_0$ візуально схожа на саму криву L . Кількісні показники - частка енергії $\iint_{L_\varepsilon} I dx dy / \iint_{\mathbb{R}^2} I dx dy$ ($L_\varepsilon - \varepsilon$ - окрестность кривої L) і ступінь однорідності $\min_L I / \max_L I$ - характеризують точність цього візуального подібності.

Один з основних методів вирішення завдань фокусування для різних кривих L - метод стаціонарної фази (в припущенні $k(\text{diam } \Omega)^2 \gg 2l_0$). Його застосування дозволяє розглядати задачу пошуку $\varphi(\zeta, \eta)$ як процес відображення області Ω в вихідної площині на криву L в площині $l = l_0$, причому кожна точка $(x, y) \in L$ має нескінченне число прообразів в області Ω . При такому розгляді в оптиці крива L називається каустик, а саме дослідження - геометрооптичним підходом до задачі фокусування. Суворе математичне постановка задачі фокусування в криву і її докладне дослідження в рамках геометричної оптики проведені в [39, 40]. Підхід, заснований на методі стаціонарної фаз, в силу специфіки завдання не дає початкових умов, тому рішення задачі принципово не є однозначним. Вибір відображення істотно впливає на вигляд рішення $\varphi(\zeta, \eta)$ і, як наслідок, на форму інтенсивності $I(x, y)$. При такому підході за межами розгляду виявляються хвильові властивості формуються полів.

У зв'язку зі сказаним вище рішення, отримані методом стаціонарної фази, для обліку хвильових властивостей світлового поля зазвичай модифікуються за допомогою тих чи інших ітеративних процедур, наприклад метода Герчберга Секстон [41]. Слід зазначити, що успішність такого підходу істотно залежить від початкового наближення, одержуваного, як уже зазначалося, методом стаціонарної фази. Однак згідно [42] рішення задачі фокусування, мають фазові сингулярності, не можуть бути отримані методом стаціонарної фази. У згаданій праці на конкретному прикладі завдання фокусування в кільце показано, що існує нескінченний набір рішень, які є хвильовими, які не дають виродженого відображення апертури оптичного

елемента в коло і, таким чином, не є фокусаторами з точки зору методу стаціонарної фази. Більш того, область хвильової фокусування лежить в геометрооптичній тіні.

Ці факти стали відправною точкою розробки методу синтезу фазових елементів для фокусування в криві (який заснований на фазовій структури відповідно спіральних пучків, природно містять фазові сингулярності) як початкового наближення. При цьому чисельні експерименти показали досить швидко збіжність методу. На рисунку 2.23 наведено приклади фазових елементів, знайдених з використанням фаз відповідних спіральних пучків і методу Герцберга Секстона. і результат їх фокусіруючої дії.

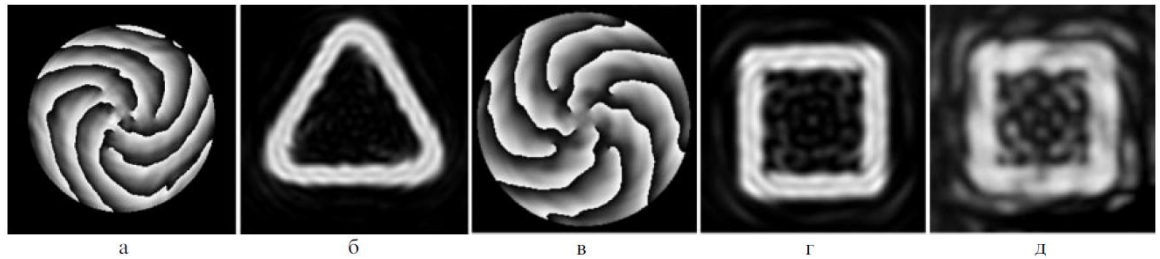


Рисунок 2.23. Розподіл фази оптичних елементів (а, в) круговій апертурі і розподіл інтенсивності полів в області фокусування (б, г – теорія, д - експеримент)

2.3. Інтегральні характеристики спіральних пучків

Відомо [43 - 45], що енергія і кутовий момент будь-якого пучка не змінюються при поширенні в зоні Френеля, тобто

$$E = \iint_{\mathbf{R}^2} |F(x, y, l)|^2 dx dy = \text{const},$$

$$L = \frac{1}{E} \iint_{\mathbf{R}^2} M(x, y, l) dx dy = \text{const}$$

є інтегральними інваріантами. Тут

$$M(x, y, l) = \text{Im} \left[\bar{F}(x, y, l) \left(y \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, l) - x \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, l) \right) \right]$$

- щільність кутового моменту. Дослідження по двовірній фазовій проблеми, як зазначалося у вступі, виявило важливу роль вихровий складової потоку світлової енергії, а саме, комплексна амплітуда поля

$$F(x, y, l) = \sqrt{I(x, y, l)} \exp [i\varphi(x, y, l)]$$

може бути відновлена, якщо на деякій площині $l = l_0$ в зоні Френеля відомі інтенсивності $I(x, y)$, її похідна у напрямку $\partial I(x, y)$ і проекція ротора потоку світлової енергії на напрям поширення

$$\text{rot}_0 \mathbf{j}(x, y) = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

Ротор потоку в загальному випадку не вдається відновити з вимірів інтенсивності, однак відомі деякі його властивості [32]:

1. Якщо (x_0, y_0) - точка екстремуму інтенсивності і $I(x_0, y_0) \neq 0$. то $\text{rot}_0 \mathbf{j}(x_0, y_0) = 0$. Якщо ж $I(x_0, y_0) = 0$, то.

$$|\text{rot}_0 \mathbf{j}(x_0, y_0)| = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \right)^2}$$

2. Якщо точка (x_0, y_0) простий нуль $F(x, y)$ і C - контур, що охоплює тільки цей нуль поля F , то

$$\oint_C \nabla \varphi \, d\mathbf{r} = 2\pi \text{sgn} \text{rot}_0 \mathbf{j}(x_0, y_0)$$

3. Має місце принцип збереження вихровий компоненти поля $F(x, y, l)$: для будь-якій площині в зоні Френеля справедливо рівність

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x + iy) \left(\frac{\partial I}{\partial l}(x, y, l) + i \text{rot}_0 \mathbf{j}(x, y, l) \right) dx dy = 0 \quad (62)$$

для будь-якої площини в зоні Френеля і будь-який цілої аналітичної функції $f(z)$, що не порушує збіжності інтеграла. Для пучків з гаусовим спадання на нескінченності (наприклад, спіральних пучків) $f(z)$ може бути поліномом будь-якого ступеня від z . В частності, випадок $f(z) = 1$ дає вже відомі закони збереження енергії і вихровий компоненти вектора потоку світлової енергії.

Можна показати, що якщо $P_n(x, y)$ - деякий поліном двох змінних x, y ступеня $n \geq 1$, то інтеграли

$$\iint_{\mathbf{R}^2} P_n(x, y) \frac{\partial I}{\partial l}(x, y, l) dx dy \quad (63)$$

$$\iint_{\mathbf{R}^2} P_n(x, y) \text{rot}_0 \mathbf{j}(x, y, l) dx dy$$

будуть поліномами від l ступеня $n - 1$ або нижче. Як наслідок, при $n = 1$

обидва інтеграла не залежить від l і, таким чином, є інтегральними інваріантами для довільного поля F . Застосовуючи цей результат $f(z) = z$ в рівнянні (62) легко отримати такі інваріанти:

$$\iint_{\mathbf{R}^2} (x + iy) \operatorname{rot}_0 \mathbf{j}(x, y, l) \, dx \, dy = c \quad (64)$$

$$\iint_{\mathbf{R}^2} (x + iy) \frac{\partial I}{\partial l}(x, y, l) \, dx \, dy = -ic$$

залежать від однієї константи c . Змістовний сенс цієї константи для довільного поля не очевидний, проте для спіральних пучків його можна прояснити. Для цього звернемося знову до властивостей зміщених спіральних пучків і розглянемо, як змінюється кутовий момент спірального пучка при його зміщенні. Можна показати, що для пучків $J(z, \hat{z})$ має місце оптичний аналог теореми Штейнера [46]: для кутового моменту L_{z_0} : спірального пучка, зміщеного по відношенню до вихідного на величину z_0 , справедливо співвідношення

$$L_{z_0} = L_{z_{\text{init}}} - 2|z_{\text{init}} - z_0|^2 \quad (65)$$

де z_{init} - координати центру ваги інтенсивності вихідного пучка:

$$z_{\text{init}} = -\frac{1}{E} \iint_{\mathbf{R}^2} (x + iy) |\mathcal{S}(z, \bar{z})|^2 \, dx \, dy$$

Дослідження інтегралів (63) при $n \geq 2$ і полів загального вигляду $F(x, y, l)$ виявилось скрутним, а підсумкові поліноми від l важко представимо. Проте мають місце два наступних результату. Перший встановлює зв'язок між кутовим моментом і ротором потоку світлової енергії:

$$L = \frac{k}{2E} \iint_{\mathbf{R}^2} (x^2 + y^2) \operatorname{rot}_0 \mathbf{j}(x, y, l) \, dx \, dy \quad (66)$$

Для доказу цього достатньо взяти циркуляцію векторного поля $(x^2 + y^2) \nabla \phi$ і застосувати формулу Гріна. Другим результатом є той факт, що не існує інтегральних інваріантів для кубічних поліномів $P_3(x, y)$.

Висновок

Сингулярною оптикою називають в останні роки область досліджень світлових полів з дислокаціями хвильового фронту, або оптичними вихорами. Поля такого виду формуються і спостерігаються як в лінійних, так і нелінійних оптичних середовищах і є предметом досить інтенсивного вивчення, тому потреба в адекватних теоретичних і експериментальних підходах для дослідження полів з оптичними вихорами - вельми актуальне завдання. Звичайно, з формальної точки зору будь-яке когерентне світлове поле можна представити у вигляді суперпозиції відомих мод Ерміта-Гауса і Лагерра - Гауса, однак такий підхід виявляється неоптимальним для аналізу і синтезу полів з фазовими сингулярностями.

Вихрові світлові поля, що зберігають свою структуру з точністю до масштабу і обертання при поширенні, або спіральні пучки, яким присвячений даний огляд, будучи своєрідними "вихровими модами" в класі полів з фазовими сингулярностями, заслуговують більш уважного розгляду як об'єкт когерентної оптики. На наш погляд, це обумовлено наступними основними причинами. По-перше, володіючи досить різноманітною формою розподілу інтенсивності, ці пучки, тим не менш, описуються явними аналітичними виразами, що робить їх ефективним інструментом дослідження закономірностей формування і перетворення світлових полів з фазовими сингулярностями загального вигляду. По-друге, є прямий аналог спіральним пучків в квантовій механіці це хвильові функції зарядженої частинки в однорідному магнітному полі, а закони перетворення спіральних пучків мають уявлення в теорії когерентних станів. Цілком можливо, ці аналогії будуть взаємно корисні і для квантової механіки, і для оптики. Нарешті, потреба, можливість гнучкої зміни розподілів інтенсивності спіральних пучків зі збереженням їх структурної стійкості при поширенні і фокусуванні представляє інтерес для лазерних технологій, створення специфічних атомних пасток, а ненульовий кутовий момент цих пучків дасть нові

можливості для маніпулювання мікрооб'єктами.

Деякі суттєві питання оптики спіральних пучків не відображені в даному огляді. Зокрема, тут розглядалися тільки пучки в формі кривих без самоперетинів. Випадок кривих з самоперетинів виявився більш складним, наприклад, для таких пучків і при виконанні умови квантування (46) нулі амплітуди можуть перебувати на породжує кривої. Пучки для кривих з самоперетинів є предметом поточних досліджень.

Можна показати [47], що скалярний твір комплексних амплітуд спіральних пучків з точністю до постійного множника збігається зі скалярним добутком відповідних одновимірних кодуєчих функцій. Крім того, існують великі класи взаємно ортогональних спіральних пучків. Звідси випливає, що такі Копіювальні функції можуть бути використані як ядра специфічних вейвлет-перетворень для обробки сигналів [48, 49]. Властивості цих вейвлет-перетворень також є в даний час предметом дослідження.

Розділ 3. Формування сингулярних пучків за допомогою синтезованих аподизованих голограм.

3.1. Синтез голограм

Дифракційними оптичними елементами (ДОЕ) називають оптичні елементи, що здійснюють перетворення хвильового фронту падаючої хвилі за рахунок дифракції світла на структурі елементу з поверхнею заданої форми. ДОЕ класифікують за типом дифракційної структури, за формою поверхні, на якій вона виконана, і, по виду перетворення хвильового фронту. ДОЕ може працювати на пропускання або відбиття, просторово модулюючи амплітуду або фазу падаючої на неї хвилі. У загальному випадку (як і в простому випадку дифракційних решіток) в результаті дифракції падаюча хвиля розщеплюється на декілька дифракційних порядків, що поширюються в різних напрямках і відрізняються як по інтенсивності, так і кривизною хвильового фронту. ДОЕ зі структурою, подібною структурі зонної пластинки, називають дифракційними лінзами. У складі оптичної системи вони можуть використовуватися як силові або як корегувальні елементи. Найбільш цікавий клас ДОЕ утворюють фокусатори лазерного випромінювання. Фокусатори — це ДОЕ, що мають регулярну мікроструктуру і фокусують лазерне випромінювання в тонкі лінії або задані області простору. Вони запропоновані і вперше досліджені в 1981 році.

ДОЕ з мікроструктурою, просторова частота (а отже, і період) якої змінюється в радіальному, одному або два взаємно перпендикулярних напрямки по заданому закону, складають клас дифракційних лінз (ДЛ) і асферик. ДЛ володіють оптичною силою, що виникає завдяки квадратичному членові в законі зміни просторової частоти. При цьому якщо структура обертальний симетрична, то ДЛ по фокусуючій дії подібна до традиційної сферичної лінзи. Якщо закон зміни просторової частоти — плоска симетрична крива, то ДЛ по фокусуючій дії подібна до традиційної циліндрової лінзи. І нарешті, якщо просторова частота змінюється по різних

законів в двох взаємно перпендикулярних напрямках, ДЛ анаморфотна і еквівалентна двом схрещеним циліндровим лінзам з нерівними оптичними силами.

Дифракційними асферами (ДА) або коректорами називають ДЛ з нульовою оптичною силою. Закони зміни їх просторових частот містять члени вищих порядків, ніж квадратичний, і до падаючого хвильового фронту вони вносять асферичні добавки різних порядків, аналогічно відомим в оптиці фазовим пластинкам, що корегують, наприклад пластинці Шмідта.

При розрахунку оптичних систем з ДЛ використовують декілька варіантів їх опису. Ті з них, які ґрунтуються на понятті ейконалу запису ДЛ, дозволяють легко отримувати абераційні коефіцієнти системи в аналітичному вигляді, формувати системи компенсаційних рівнянь і, вирішуючи їх, усувати аберацію.

Синтезовані голограми здійснюють формування сингулярностей для подальшого їх використання для наукових та прикладних цілей. З цією метою ми розраховуємо позавісєві та вісєві голограми мод Лагера-Гауса LG01 та LG11. Врахування не лише фазового, а й амплітудного розподілу пучка в даному розрахунку дозволить зменшити вимоги до узгодження голограми та лазерного пучка, що, в свою чергу, спрощує оптичну схему установки.

У випадку встановлення та зчитування позавісєвої голограми (рис.3.1 а,в) в лазерний пучок з квазірівномірним розподілом амплітуди у перших порядках дифракції відновлюється відповідна мода. В +1 порядку відновлюється мода с зарядом +1, а у -1 порядку - із зарядом -1. Цей факт протилежності "закруток" хвильового фронту у протилежних порядках дифракції вже можна використати для кодування та передачі інформації.

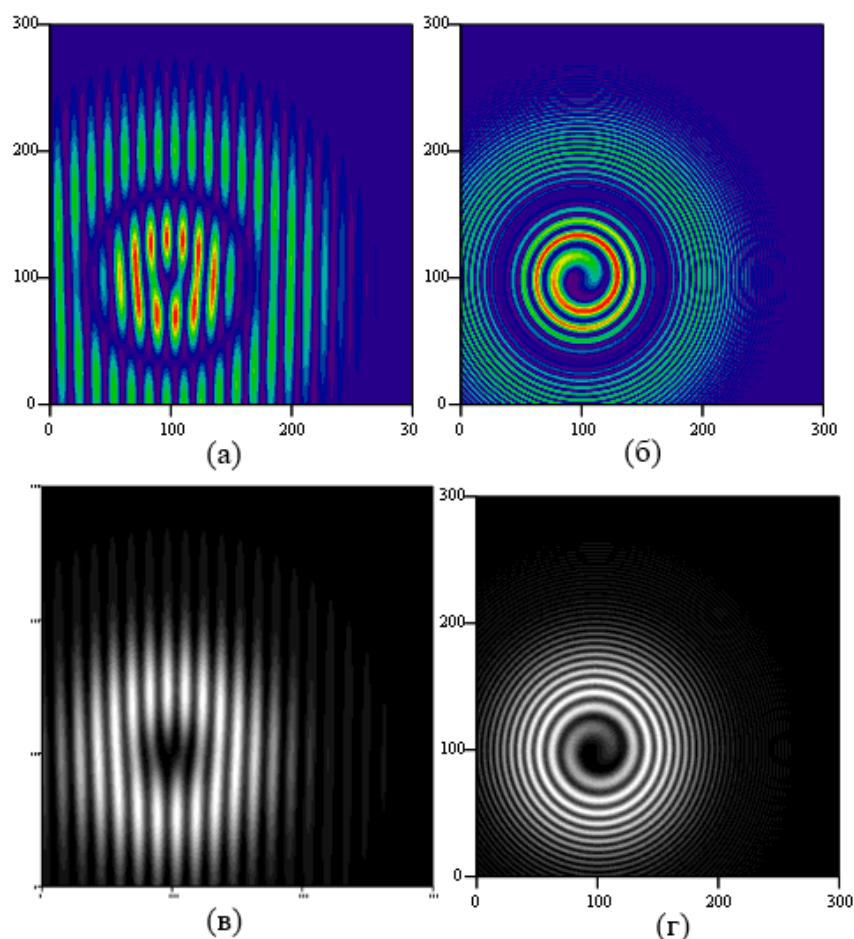


Рисунок 3.1 Аподизовані синтезовані голограми для мод LG11 (а, б) та LG 01 (в,г) у випадку позавісової (а,в) та вісьової (б,г) схем зчитування.

Наведено програму розрахунку аподизованих синтезованих голограм для формування сингулярних пучків, що містять моду LG11 (рис.3.1а, б) та моду LG01 (рис.3.1,в,г) (Додаток А). Осьові голограми (рис.3.1,б,г) використовуються для створення модового складу вздовж оптичної вісі.

Такі голограми використовуються в подальшому дослідженні для формування поляризаційних сингулярностей та сингулярностей функції когерентності.

Для того щоб перевірити, чи дійсно сформований той чи інший тип сингулярності було запропоновано дифракційний метод діагностики сингулярностей.

3.2 Дифракційні методи діагностики сингулярностей

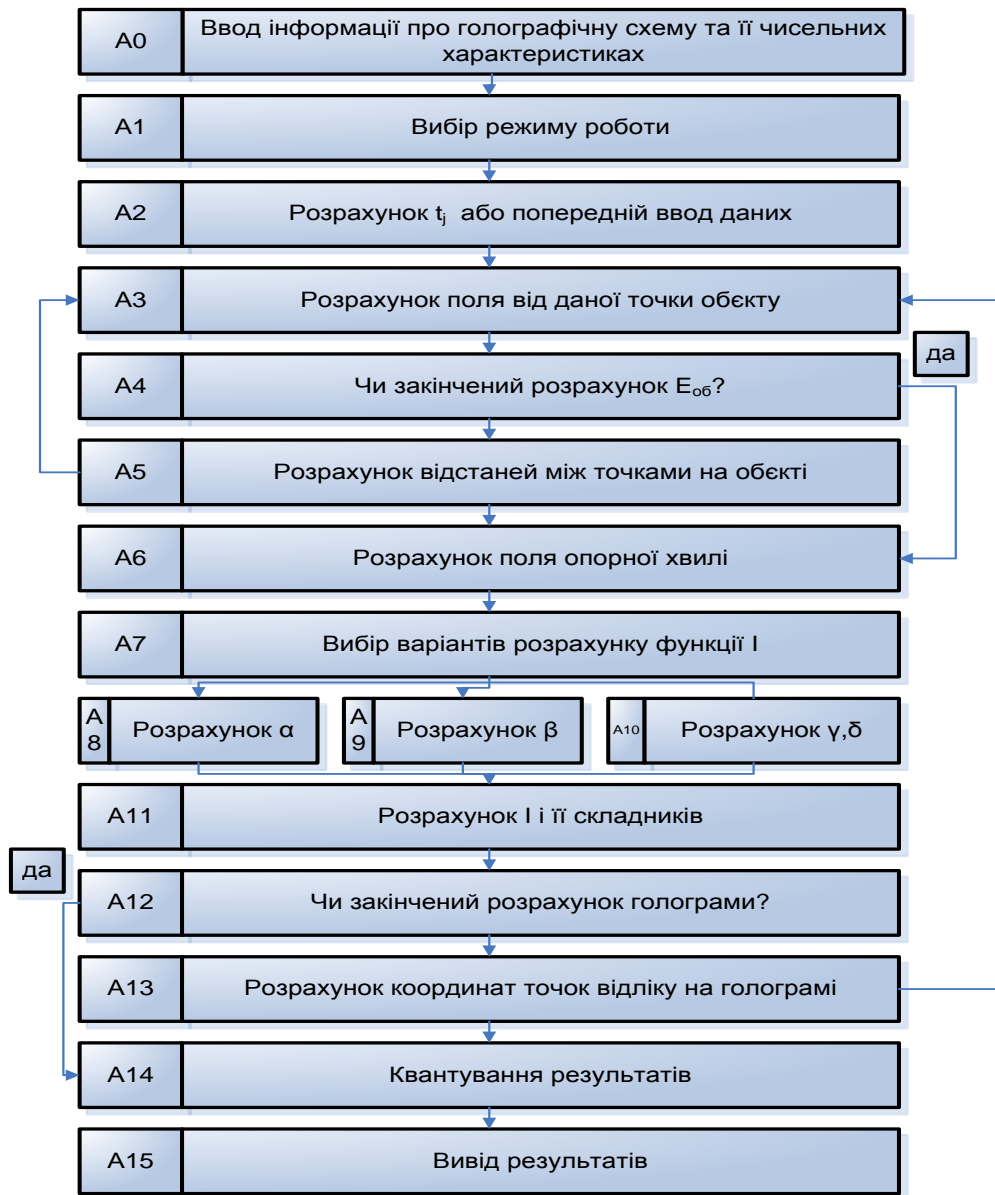
3.2.1 Дифракційного методу діагностики фазових сингулярностей в оптичних пучках, який базується на юнгівській моделі дифракції

Цей метод базується на моделі крайової дифракційної хвилі (КДХ) із залученням представлення Рубіновича дифракційного інтегралу Кірхгофа та принципу стаціонарної фази й виконанні інтерференційного експерименту Юнга у його початковій постановці.

Суть методу полягає у наступному. Непрозора стрічка розміщується у сингулярному пучку, наприклад у Лагер-Гаусовий (ЛГ) моді $LG_{n,m}$, де індекатриси n і m визначають, відповідно, порядок полінома Лагера-кількість нулів у радіальному розподілі амплітуди — та азимутальний індекс (топологічний заряд) моди - кратний 2π набіг фази при круговому обході оптичного вихору. У геометричній тіні стрічки спостерігаються інтерференційні смуги, утворені КДХ від країв стрічки. Напрямок вигину інтерференційних смуг безпосередньо й однозначно характеризує знак топологічного заряду вихрового пучка (напрямок закрутки фазового гелікоїда), а величина вигину - його модуль. У даному розділі дифракційний метод діагностики використовується для аналізу строго когерентних сингулярних пучків.

Для об'єктів складної форми обчислення поля дифракції на основі строгих методів електродинаміки представляє великі математичні труднощі. Тому були розроблені алгоритми синтезу голограм складних об'єктів, засновані на наближених методах з використанням інтеграла Кірхгофа.

Нижче представлений алгоритм розрахунку по методу оснований на прямому розрахунку інтеграла Кірхгофа.



Застосування стрічкового інтерференційного експерименту Юнга до діагностики вихрових оптичних пучків пояснюється із використанням позначень Рис. 3.2, де $\rho = (p, \phi)$ і $\rho' = (p', \phi')$ - радіус-вектори біжучих точок вихрового пучка у полярних координатах. Непрозора стрічка шириною $2d$ розташована перед LG_m^m модою симетрично вісі пучка (де амплітуда поля нульова). Якщо неprozора стрічка опромінюється безвихровим пучком (плоскою хвилею або модою LG_0^0), то різниця фаз парціальних хвиль від крайових перевипромінювачів у центрі геометричної тіні ($x = 0$), $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$, дорівнює нулю для кожного g , незалежно від $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$.

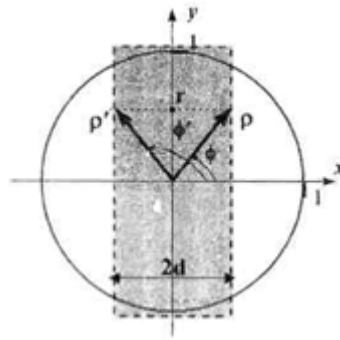


Рисунок 3.2 – Позначення для аналізу стрічкового інтерференційного юнгівського експерименту по тестуванню вихрових пучків.

При цьому спостерігаються прямі інтерференційні смуги, паралельні до країв стрічки, із максимумом у центрі геометричної тіні. Результат моделювання для цього випадку показано на Рис. 3.3(а) (Додаток Б).

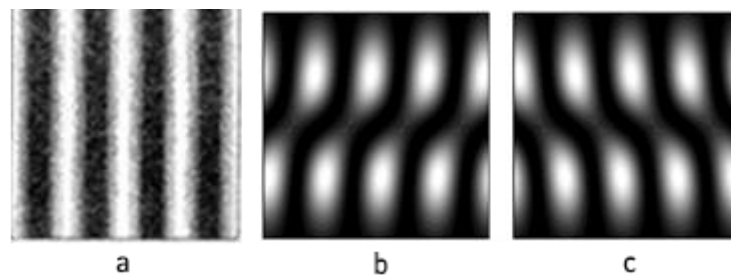


Рисунок 3.3 – Моделювання: інтерференційні смуги Юнга зі непрозорою стрічкою, опроміненою безвихровою модою LG_0^0 (а) і вихровою модою LG_0^{-1} (б), вихровою модою LG_0^{+1} (с) (Розрахунок приведено в Додатку А)

Більш складна структура інтерференційної картини реалізується при опроміненні стрічки вихровим пучком, Рис. 3.3(б) Якщо фаза хвилі змінюється на $m2\pi$ на замкненому контурі навколо вісі пучка, крайові перевипромінювачі для m — зарядного вихору при $r = 0$ (на “екваторі” пучка, $y = 0$, $\Delta\varphi = \varphi - \varphi' = \pi$) відрізняються по фазі на $\Delta\varphi = m\pi$. Так, для $|m| = 1$, "екваторіальні" крайові перевипромінювачі є протифазними, і юнгівські інтерференційні смуги при $r=0$ для моди $LG_0^{\pm 1}$ зміщені на півперіоду відносно випадку, показаного на Рис. 3.3 а. Таким чином, у центрі геометричної тіні для $y = 0$ отримується інтерференційний нуль, а не

максимум. При цьому, інтерференційні смуги на "південному" та "північному" полюсах пучка (де $\Delta\varphi \rightarrow 0$) розташовані подібно Рис. 3.3 а, оскільки $\Delta\varphi \rightarrow 0$. (Це справедливо асимптотично, якщо $d \rightarrow 0$.)

Для однозарядного вихору інтерференційні смуги на полюсах зміщені на один період. В загальному випадку фаза інтерференційних смуг,

$$\Delta\varphi(d, r) = m[\pi + \arctg(r/d)].$$

утворених m -зарядною ЛГ-модю позаду стрічки, описується наступним законом:

Стрічковий юнгівський експеримент застосовний також для виявлення фазових сингулярностей типу нелокалізованої темної інтерференційної смуги (НЛТІС). А саме, при перетині НЛТІС інтерференційні смуги за непрозорою стрічкою зазнають розриву і зсуву.

Експеримент виконувався із використанням методу синтезованих голограм для формування однозарядних „бубликових” ЛГ-мод. В якості непрозорого стрічкового екрану використовувалась металева голка.

Можлива також застосовність дифракційного методу до діагностики фазових сингулярностей у повністю розвинених скалярних (однорідно поляризованих) спекл-полях. Відомо, що топологічно стійкими сингулярностями у таких полях є оптичні вихори, що підкоряються так званому знаковому принципу. Спекл-поле отримувалось у результаті розсіяння лазерного пучка на шорсткій поверхні матового скла із великими (у масштабі довжини хвилі зондуючого випромінювання) поверхневими неоднорідностями. В області геометричної тіні непрозорого стрічкового екрану спостерігались юнгівські інтерференційні смуги. Чергування напрямків вигину інтерференційних смуг безпосередньо свідчить, що суміжні вихори, у відповідності зі знаковим принципом, характеризуються топологічними зарядами протилежних знаків. Цей результат, отриманий для області френелівської дифракції, на нашу думку, може бути застосованим і

при діагностиці оптичних вихорів у найближчій зоні за розсіюючим об'єктом, де використання опорної хвилі неможливе.

Дифракційний метод діагностики фазових сингулярностей. Полягає у використанні дифракційної експериментальної методики. При розташуванні непрозорої стрічки на границі геометричної тіні в результаті дифракції на краю напів-площини посередині тіні спостерігається саме НЛТІС, а не світла інтерференційна смуга, як при опроміненні тієї ж стрічки однорідною циліндричною хвилею. Це безпосередньо підтверджує протифазність компонент КДХ, симетричних відносно границі тіні.

Здійснення діагностики фазових сингулярностей у хвильових полях із використанням непрозорої стрічки еквівалентне виконанню величезної кількості стандартних юнгівських інтерференційних експериментів із двома отворами у непрозорому екрані, що розташовуються на різних r відносно вихору (див. Рис. 3.2). Проте, при реалізації дифракційного тестування фазова карта пучка отримується „в один крок”, й відсутня необхідність наступної обробки експериментальних даних для „зшивки” результатів часткових експериментів.

Зазначимо, що при використанні опорної хвилі для діагностики оптичних сингулярностей фаза інтерференційних смуг визначається різницею фаз опорної та сингулярної хвиль у різних точках поля, тобто по суті визначається фаза взаємної кореляційної функції таких двох хвиль (модуль комплексного ступеня когерентності при цьому тотожно дорівнює одиниці). Натомість, при безопорній (дифракційній) діагностиці фазових сингулярностей інтерференційно порівнюються фази збурень безпосередньо у різних точках тестованого поля; отже даний метод є автокореляційним. При цьому, у загальному випадку, контраст інтерференційних смуг визначається модулем просторового ступеня когерентності (та співвідношенням амплітуд) збурень в обраних точках поля, а фаза інтерференційних смуг - фазою комплексної функції когерентності таких збурень. Вказана відмінність двох методів не має принципового значення при

діагностиці фазових сингулярностей у строго когерентних полях; тут на перший план виступають скоріше певні технічні переваги дифракційного методу. Справжня ж актуальність останнього висновку й потужність обстоюваного нами методу виявляється при дослідженні фазових сингулярностей у часткового когерентних полях, якому присвячено наступний розділ дисертації.

Оптична голограма одночасно виконує три функції: функцію вимірювання і реєстрації амплітуди і фази хвильового фронту (запис інформації), функцію зберігання результатів цього вимірювання (зберігання інформації) і функцію реконструкції хвильового поля (відтворення інформації).

Цифрова голографія — це аналіз, синтез і моделювання хвильових полів засобами цифрової обчислювальної техніки. Аналіз полів — це вимірювання фізичних параметрів об'єктів за наслідками реєстрації у вигляді голограм і інтерферограм розсіяного ними хвильового поля. Синтез полягає в побудові хвильового поля об'єкту, заданого своїм математичним описом або сигналом. Моделювання — вивчення перетворення полів в голографічних системах за допомогою дослідження їх цифрових моделей.

3.2.2 Дифракційний метод діагностики фазових сингулярностей

Дифракційний метод діагностики фазових сингулярностей поширено на частково просторово когерентні пучки. Предметом дослідження були комбіновані пучки із сепарабельною фазою просторової функції когерентності [50, 51], тобто пучки, фаза функції когерентності яких в полярних координатах представляється у функціональній формі

$$f_B(\rho/w_z, \rho'/w_z) \exp[i\pi(\phi - \phi')] \quad (1)$$

Такі пучки можуть бути утвореними як некогерентна суперпозиція ЛГ-мод (із однаковим топологічним зарядом m , але із різними модовими номерами n), взятих з певними ваговими коефіцієнтами. Вочевидь, звичайна

комплексна амплітуда у будь-якій точці у поперечному перерізі такого комбінованого пучка невизначена, тому може йтись лише про фазові сингулярності функції когерентності, діагностика яких вимагає адекватних експериментальних засобів. В загальному випадку використання класичної інтеферометричної методики для тестування сингулярностей у таких пучках неможливе, оскільки жоден пучок не може бути взаємно когерентним зі всіма (за умовою – взаємно некогерентними) компонентами комбінованого пучка. Відразу зазначимо, що комбінований пучок не є статистично однорідним: значення функції когерентності залежить не лише від різниці $|r-r'|$, але й від конкретних значень r і r' .

Нами розглянуто найпростіший нетривіальний (й практично важливий) випадок, коли частково просторово когерентний пучок із сепарабельною фазою утворюється взаємно некогерентними однозарядними ЛГ-модами із номерами 0 і 1 [50, 51]. Найкраще наближення до пучка із радіальним розподілом інтенсивності, близьким до такого розподілу в ізольованій моді LG_0^1 , досягається при співвідношенні потужностей мод LG_0^1 і LG_1^1 1,45:1, див. Рис. 3.4.

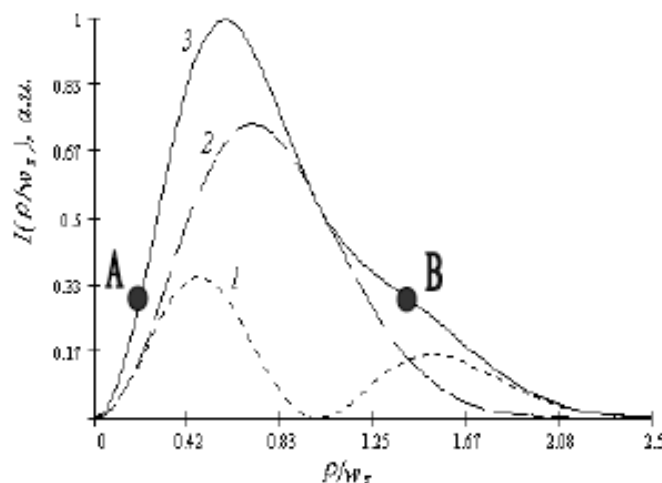


Рисунок 3.4. Радіальний розподіл інтенсивностей в ЛГ-модах LG_0^1 і LG_1^1 (криві 1 і 2) та у комбінованому пучку (крива 3) у функції безрозмірної координати r/w_z при відношенні інтегральних потужностей мод 1,45. А і В - пробні точки для виявлення кільцевої фазової сингулярності комплексного ступеня когерентності.

Принципова схема експерименту наведена на Рис. 3.5. Різниця ходу у плечах розузгодженого інтерферометра задавалась приблизно утричі більшою за попередньо виміряну довжину когерентності використаного гелій-неонового лазера. У плечах інтерферометра розташовувались комп'ютерно-синтезовані голограми, які відновлювали у перших дифракційних порядках моди LG_0^1 і LG_1^1 . Робочі порядки відселектовувались за допомогою діафрагм.

Для забезпечення потрібного співвідношення потужностей використовувались контрольовані нейтральні послаблювачі у плечах інтерферометра (не показані на Рис. 3.5). Вимірний радіальний розподіл інтенсивності у комбінованому пучку на виході інтерферометра був близьким до показаного на Рис. 3.4 (крива 3).

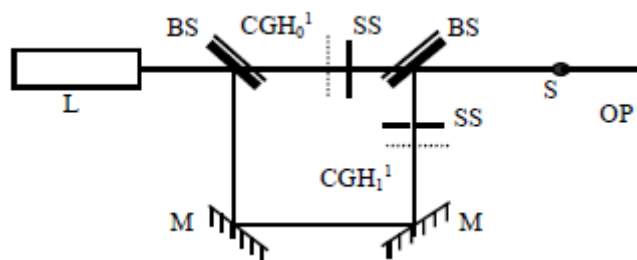


Рисунок. 3.5. Схема формування частково просторово когерентного сингулярного пучка і його дифракційної діагностики: L – лазер, BS – світлоподільники, М – дзеркала, CSH-01 і CSH-11 – комп'ютерно-синтезовані голограми для відновлення мод LG_0^1 і LG_1^1 , SS – селекуючі діафрагми, S–непрозора стрічка, ОП–площина спостереження.

Азимутальна залежність фази функції когерентності визначалась із використанням крайової дифракції. Інтерференційну картину, показану на Рис. 3.6, отримано при опроміненні непрозорої стрічки комбінованим вихровим пучком. Цей результат [50] ілюструє дифракційне тестування фазової сингулярності (вихору) просторової функції когерентності частково когерентного сингулярного пучка. А саме, фаза (вигин) інтерференційних смуг безпосередньо відображає фазову структуру просторової функції когерентності. Зауважимо, що у даному експерименті одиничний контраст юнгівських інтерференційних смуг за непрозорою стрічкою реалізується при

$\Delta\rho \equiv 0$ і $0 \leq \Delta\phi \leq \pi$, тобто модуль комплексного ступеня когерентності не залежить від різниці азимутальних координат.

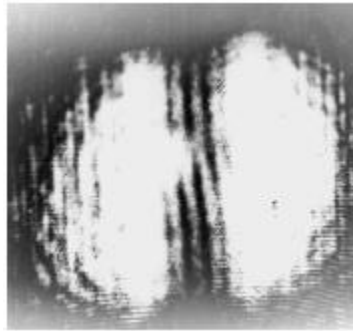


Рисунок 3.6. Дифракційне тестування комбінованого частково когерентного пучка.

Окрім центрального вихору функції когерентності, комбінований пучок може містити кільцеві нелокалізовані сингулярності комплексного ступеня когерентності. Такі сингулярності мають місце за умови рівних амплітуд взаємно некогерентних змішуваних мод і є аналогом НЛТІС у строго когерентних ЛГ-модах. В загальному випадку (багатьох змішуваних мод) такі сингулярності діагностувати важко, перш за усе, через зазначену вище статистичну неоднорідність комбінованого пучка. Проте, у досліджуваному нами частковому випадку вдається безпосередньо виявити кільцеву нелокалізовану сингулярність вказаного типу, що вперше було продемонстровано у роботі [51]. Діагностика кільцевої фазової сингулярності комплексного ступеня когерентності може бути, в принципі, реалізованою за ви-кладеною дифракційною методикою – із використанням зміщеної (відносно центрального вихору) непрозорої стрічки. Проте, з огляду на низку технічних міркувань, такий підхід не є оптимальним. Для розв’язання цієї проблеми виявилось доцільнішим здійснити юнгівський експеримент у його традиційній постановці.

Непрозора стрічка на Рис. 3.6 замінюється на непрозорий екран із двома отворами у точках А і В (Рис. 3.4) на радіусі комбінованого пучка. Особливість так обраних пробних точок пучка полягає у тому, що усі чотири парціальні компоненти комбінованого пучка, які беруть участь у формуванні результуючої інтерференційної картини, є рівноінтенсивними. Проте,

ізолювані змішувані ЛГ-моди утворюють протифазні інтерференційні картини, як це впливає із способу їх побудови і видно з Рис. 3.7 а і б. Контраст результуючої інтерференційної картини, яка утворюється обома сингулярними модами, знижується до нуля (Рис. 3.7 с). По суті, у даному випадку йдеться про сингулярнооптичний аналог класичного експерименту Б. Томпсона [52], призначеного для доведення чинності теореми Ван-Циттерта – Церніке. З іншого боку, даний результат є одним із показових втілень методології Вольфа [52], спрямованої на побудову „оптики спостережуваних величин”, найважливішими з яких є видність і фаза інтерференційної картини (\equiv модуль і фаза комплексного ступеня когерентності досліджувано-го світлового поля).

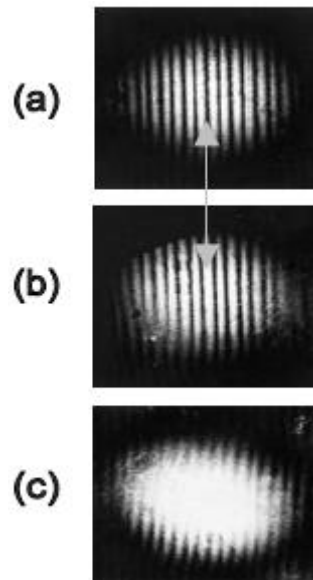


Рисунок 3.7. Визначення кільцевої фазової сингулярності комплексного ступеня когерентності у комбінованому частково когерентному пучку.

Отже, у другому розділі обґрунтовано і здійснено комплексну діагностику фазових сингулярностей функцій когерентності, які мають місце у комбінованих частково просторово когерентних вихрових пучках. Принциповий результат цього дослідження полягає у демонстрації того, що фазові сингулярності комплексного ступеня когерентності можуть мати місце за умов, коли нулі амплітуди (отже, і фазові сингулярності звичайної комплексної амплітуди поля) відсутні як у результуючому пучку, так і у кожній його компоненті.

3.2.3 Результати з формування та дифракційної діагностики комбінованих пучків

Результати з формування та дифракційної діагностики комбінованих пучків, що несуть нетипові векторні сингулярності у поперечному перерізі пучка, такі як замкнені C – контури (контури циркулярної поляризації) та L –контури (контури лінійної поляризації) із постійним азимутом поляризації, а також сингулярності ступеня поляризації [53]. В принципі, подібні поляризаційні структури виникають і при співвісному складанні безвихрових поляризаційно ортогональних ЛГ-мод із різними каустичними параметрами. Але сенс даного дослідження полягає у побудові векторного аналогу результату, викладено-го у попередньому розділі. Підґрунтям такого підходу є те, що як когерентні, так і поляризаційні характеристики пучка вичерпано повно описуються на основі спільного апарату – матриць когерентності (поляризації) [52].

Застосовувалась наступна методика розрахунку. Вектор Джонса комбінованого пучка будувався як сума векторів Джонса зважених взаємно когерентних поляризаційно ортогональних парціальних співвісних мод LG_0^1 і LG_1^1 . За результуючим вектором Джонса знаходилась матриця когерентності комбінованого пучка у функції безрозмірної радіальної координати ρ/w_z ; потім будувались параметри Стокса як комбінації елементів матриці когерентності, й за ними знаходились еліпсометричні параметри – азимут поляризації α та кут еліптичності β . При розгляді некогерентного змішування мод за парціальними векторами Джонса знаходились параметри Стокса відповідних пучків, які складались (без урахування фазових співвідношень між модами) для визначення α , β і ступеня поляризації P у функції ρ/w_z . На основі отриманого загального розв'язку для ортогонально еліптично поляризованих пучків детально проаналізовано показові часткові випадки, коли парціальні моди поляризовані лінійно або циркулярно.

Експеримент проводився у схемі інтерферометра Маха-Цендера. Змішувались зважені (див. Розділ 2) поляризаційно ортогональні моди LG_0^1 і LG_1^1 .

Здійснювалась комплексна діагностика векторних сингулярностей у комбіновано-му пучку, що поєднувала поляризаційний аналіз комбінованого пучка із використанням чвертьхвильової платівки та лінійного аналізатора й дифракційне тестування результуючого (поляризаційно відселектованого) пучка.

Сформулюємо результати цього дослідження. При когерентному змішуванні зважених поляризаційно ортогональних мод у результуючому пучку виникають кільця із циркулярною поляризацією та із лінійною поляризацією з постійним азимутом поляризації. Радіальні координати таких кілець визначаються співвідношенням амплітуд та фаз змішуваних пучків. При відношенні амплітуд змішуваних мод, реалізованому у попередньому розділі, за поляризаційним аналізатором спостерігається картина, подібна до показаної на Рис. 3.3, але із НЛТІС на кільці $\rho/w_z = 1,45$, а не на кільці $\rho/w_z = 1$. Дифракційний аналіз засвідчує наявність як центрального вихору, так і розрив і зсув юнгівських інтерференційних смуг в околі даного кільця.

При некогерентному змішуванні зазначених парціальних пучків на відповідній радіальній координаті спостерігається незвична сингулярність ступеня поляризації комбінованого пучка, при перетині якої стан поляризації стрибкоподібно змінюється на ортогональний. Зауважимо, що в даному випадку на кільці $\rho/w_z = 1,45$ одночасно має місце і фазова сингулярність комплексного ступеня когерентності, продемонстрована у попередньому розділі.

Мета дослідження, результати якого описані у четвертому розділі, полягала у здійсненні самообертання оптичних вихорів за оригінальним методом статико-голографічного фазового спряження [54] й у визначенні, шляхом дифракційної діагностики, закономірностей перетворення структури вихорів при такому способі їх фазового спряження.

Принцип самообертання хвильового фронту за статичною нелінійною голограмою полягає у наступному. На відміну від лінійної теорії голографії, у якій передбачається пропорційність амплітудного відгуку голограми $T_a(\mathbf{r})$ експозиції $E(\mathbf{r}) = tI(\mathbf{r})$ (t - час експонування, $I(\mathbf{r})$ - розподіл інтенсивності, що виникає у результаті суперпозиції сигнальної та опорної хвиль), у загальному випадку амплітудний відгук голограми представляється розкладом:

$$T_a(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^n T_l [I(\mathbf{r})]^l \quad (2)$$

де $T_l = c_l t^l$, а $c_l = (l!)^{-1} [\partial^l T_a(\mathbf{r}) / \partial E^l(\mathbf{r})]$. Утримання членів розкладу (2) до відповідає наближенню „квадратичної голограми” [54]. Амплітудний відгук квадратичної голограми сигнального пучка (наприклад, ЛГ-моди) $G(\mathbf{r}) = A \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi)]$, записаної зі стоячою опорною хвилею

$$\Omega(\mathbf{r}) = \Omega_1(\mathbf{r}) + \Omega_2(\mathbf{r}) = a \exp[i(\omega t - \mathbf{k}_0\mathbf{r} + \varphi_1)] + b \exp[i(\omega t + \mathbf{k}_0\mathbf{r} + \varphi_2)],$$

має вигляд:

$$T_a(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^2 T_l [G(\mathbf{r}) + \Omega_1(\mathbf{r}) + \Omega_2(\mathbf{r})]^2 \quad (3)$$

Квадратична компонента (3) містить доданок $\{2T_2\Omega_1(\mathbf{r})\Omega_2(\mathbf{r})(G^*(\mathbf{r}))^2\}$, який саме і відповідає за фазове спряження сигнальної хвилі у режимі самообертання. Дія цього парціального оператора квадратичної голограми на сигнальну хвилю $G(\mathbf{r})$ (у відсутності на стадії відновлення обох компонент стоячої опорної хвилі) призводить до виникнення фазоспряженої хвилі

$$\{2T_2\Omega_1(\mathbf{r})\Omega_2(\mathbf{r})(G^*(\mathbf{r}))^2\}G(\mathbf{r}) = \alpha A \exp[i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{r} - \varphi)] \quad (4)$$

де $\alpha = 2T_2ab \exp[i(\varphi_1 + \varphi_2)]$ - комплексна константа.

Експериментальна схема запису квадратичної голограми вихрового пучка показана на Рис. 3.8. Сингулярний пучок формувався із використанням синтезованої голограми, розташованої в об'єктному плечі. В наших експериментах використовувались вихрові пучки з $|m| = 1, 2, 3$.

від площини точного фазового спряження. Фазоспряжені ж репліки високозарядних вихорів спостерігаються лише в обмеженому околі цієї площини, а при подальшому поширенні розпадаються на однозарядні вихори одного знаку.

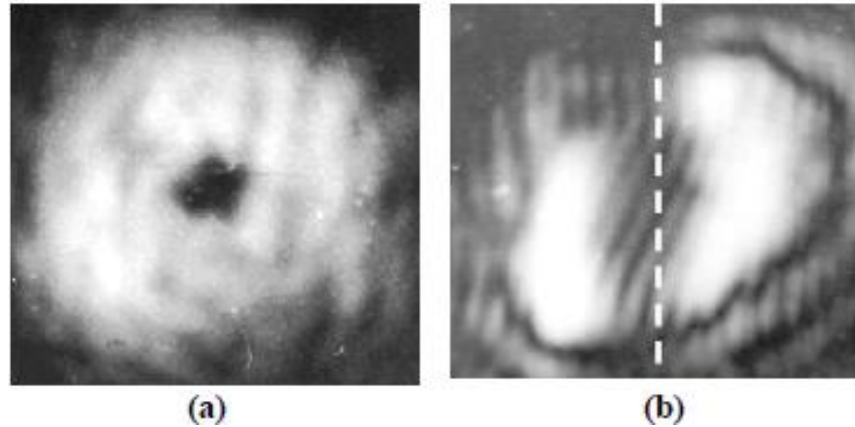


Рисунок 3.9. Лагер-Гаусова мода 3 LG_0^{+3} (а) та дифракційна діагностика її фазоспряженої репліки поблизу площини самообертання (б).

Принциповий результат цього дослідження полягає у наступному. Метод статико-голографічного самообертання хвильового фронту за квадратичними голограмами було розвинуто для реалізації помилкокоректуючої голографічної асоціативної пам'яті [54]. При цьому, основна увага приділялась відновленню обвідної просторового розподілу інтенсивності в асоціативному відгуці, а не доведенню саме фазоспряжуючих властивостей квадратичної голограми. Отже, викладені тут результати є прямим експериментальним підтвердженням принципу самообертання хвильового фронту, розвинутого у [54]. При цьому встановлено, що, як і при аналізі самообертання еліптично поляризованих пучків, необхідно брати до уваги перетворення системи координат при аналізі записуваного пучка та його фазоспряженої репліки.

3.3. Експериментальне дослідження поляризаційні сингулярності

Для аналізу властивостей поляризації світлового сигналу найбільш часто використовують параметри Стокса, які дозволяють представляти не тільки поляризований, але частково поляризоване світло, тобто світло, що має як поляризовану, так і природну компоненту. Параметри Стокса визначаються наступним чином:

S_0 - усереднена за часом повна потужність світлового сигналу, потужність поляризованої і неполяризована компонент.

S_1 - різниця між потужністю лінійної горизонтальній і лінійної вертикальної поляризаційними компонентами світлового сигналу.

S_2 - різниця між потужністю лінійної $+45^\circ$ і лінійної -45° поляризаційними компонентами світлового сигналу.

S_3 - різниця між потужністю кругової правобічної і кругової лівосторонньої поляризаційними компонентами світлового сигналу.

Параметри Стокса описують світловий сигнал в енергетичному поданні, що дає додаткову зручність при експериментальному дослідженні - струм фотоприймача пропорційний потужності прийнятого оптичного випромінювання.

Потужності поляризованої і неполяризована компонент світла дорівнюють відповідно $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ і $S_0 - \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$. Ступенем поляризації SOP (приймає значення від 0 до 1) називають відношення потужності поляризованої частині випромінювання до всієї потужності випромінювання

$$SOP = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}$$

Поряд з S_1 , S_2 , S_3 використовують також нормовані параметри Стокса

$$s1 = \frac{S_1}{S_0}, s2 = \frac{S_2}{S_0} \text{ і } s3 = \frac{S_3}{S_0}. \text{ Для поляризованого світла } s1^2 + s2^2 + s3^2 = 1.$$

Таким чином якщо ввести декартову систему координат з осями s_1 , s_2 і s_3 , то безліч всіх точок, відповідних поляризованому світлі, утворюють сферу радіуса 1, яка називається сферою Пуанкаре (Poincare), рис.3.10.

Стан частково поляризованого світла відображається вектором довжиною SOP всередині сфери Пуанкаре. Неполаризованого світла ($SOP = 0$) відповідає точка початку координат.

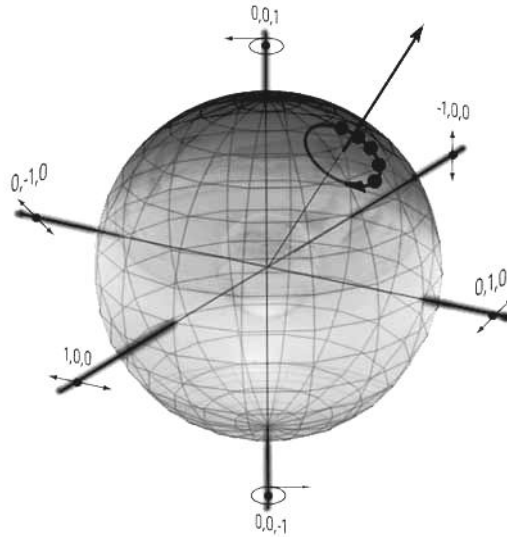


Рисунок 3.10. Сфера Пуанкаре

Стан поляризації комбінованого пучка визначається виключно співвідношенням амплітуд і фаз ортогональних поляризаційних складових. Це можна визначити за допомогою параметрів Стокса.

Комбінованого пучку відповідають наступні параметри Стокса:

$$\begin{aligned} S_0 &= (1 + c^2)(a^2 + b^2), \\ S_1 &= (1 - c^2)(a^2 - b^2) + 4cab \cos \Delta, \\ S_2 &= 2\left[(1 - c^2)ab \cos \Phi_{YZ} - c\left[a^2 \cos(\Delta - \Phi_{YX}) - b^2 \cos(\Delta + \Phi_{YX})\right]\right], \\ S_3 &= 2\left[(1 - c^2)ab \sin \Phi_{YZ} - c\left[a^2 \sin(\Delta - \Phi_{YX}) - b^2 \sin(\Delta + \Phi_{YX})\right]\right], \end{aligned} \quad (5)$$

де $\Phi_{YX} = \varphi_Y - \varphi_X$, $c \equiv c(\rho/w_Z)$ - відношення амплітуд мод як функція безрозмірного параметра ρ/w_Z , рівного відношенню радіальної координати $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ до ширини пучка w_Z на відстані Z від площини перетяжки

$$w_z = w_0 \left[1 + \left(\frac{z^2}{\pi^2 w_0^4} \right) \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

де w_0 - розмір плями в площині перетяжки, оцінюваний за рівнем $\frac{1}{e}$

щодо максимального значення амплітуди;

Δ - фазовий зсув між модами, який вважається постійним по перетину комбінованого пучка в запропонованому рівність каустичних параметрів і, отже, однакової кривизни змішуються хвильових фронтів у площині спостереження, рівновіддалених від площин двох перетяжок.

Отже, всі параметри Стокса комбінованого пучка є функціями радіальної координати, таким чином, він виявляється просторово-неоднорідне поляризованим.

З формули (1) знаходимо азимут поляризації:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$$

і кут еліптичності:

$$\beta = \frac{1}{2} \arcsin(S_3)$$

Далі розглядаються два випадки, коли моди поляризовані лінійно або циркулярно.

Випадок 1. Моди поляризовані лінійно з азимутами 0° і 90° .

При цьому параметри:

$$b = 0, \Delta = \pm \frac{\pi}{2}, \Phi_{xy} = 0$$

При $\Delta = \pm \frac{\pi}{2}$ з формули (1) знаходимо нормовані параметри Стокса:

$$S_1 = \frac{1-c^2}{1+c^2}, S_2 = 0, S_3 = \pm \frac{2c}{1+c^2} \quad (6)$$

Комбінований пучок в цілому характеризується еліптичною поляризацією з азимутом поляризації і кутом еліптичності:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{2} \arcsin(\pm \frac{2c}{1+c^2})$$

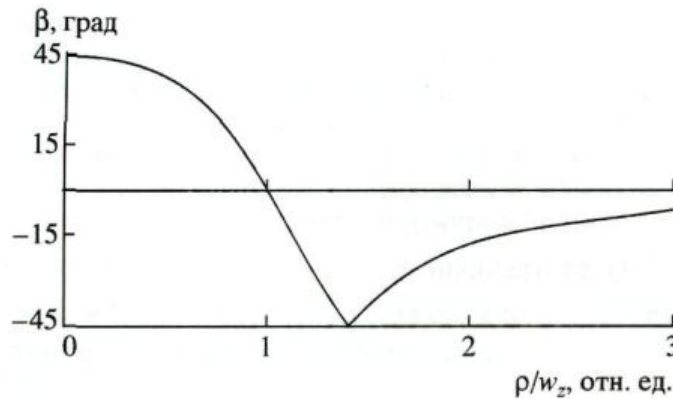


Рисунок 3.11. Радіальний розподіл кута еліптичності β (ρ / w_Z) в комбінованому сингулярному пучку, утвореному в результаті когерентного змішання ортогонально лінійно поляризованих мод з різницею фаз $\delta = \pi / 2$.

Азимут поляризації $\alpha = 0^\circ$ при $\rho / w_Z < 1.45$, де $|c| < 1$, і $\alpha = 90^\circ$ при $\rho / w_Z > 1.45$, де $|c| > 1$. На кільці $\rho / w_Z = 1$, де $c = 0$, пучок поляризований лінійно, $\alpha = 0^\circ$, кут еліптичності не визначений внаслідок зміни знаку \arcsin на цьому кільці.

Тому в поле еліптичних поляризацій на кільці $\rho / w_Z = 1$ виникає L -контур з постійним азимутом лінійної поляризації $\alpha = 0^\circ$, а на кільці $\rho / w_Z \approx 1.45$ - замкнутий C -контур.

Випадок 2. Парціальні моди ортогонально циркулярно поляризовані

При цьому параметри:

$$b = a, \quad \Delta = \pi, \quad \Phi_{yx} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Згідно (1) нормовані параметри Стокса наступні:

$$S_1 = \frac{2c}{1+c^2} \cos \Delta, \quad S_2 = \mp \frac{2c}{1+c^2} \sin \Delta, \quad S_3 = \frac{1-c^2}{1+c^2} \quad (7)$$

азимут поляризації:

$$\alpha = \pm \frac{\Delta}{2},$$

кут еліптичності:

$$\beta = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{1 - c^2}{1 + c^2} \right)$$

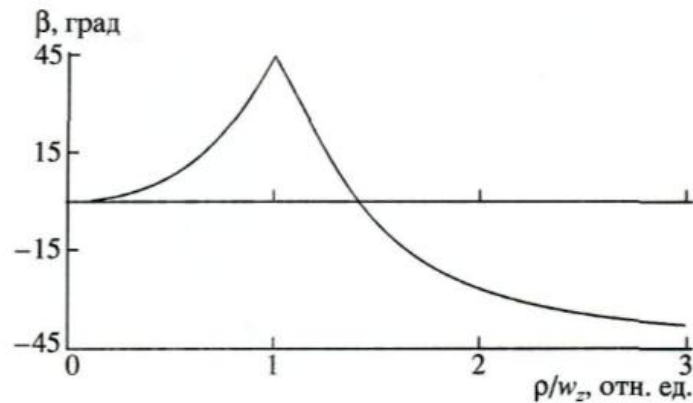


Рисунок 3.12 Радіальний розподіл кута еліптичності β (ρ / w_Z) в комбінованому сингулярному пучку, утвореному в результаті когерентного змішання ортогонально циркулярно поляризованих мод

На кільці $\rho/w_z=1$, де, $c=0$, азимут поляризації не визначений в слідстві невизначеності $\arctg(0/0)$ і $\beta = \pm \frac{\pi}{4}$. Таким чином на цьому кільці утворюється С-контур з поляризацією моди LG_1^1 . На кільці $\rho/w_z=1.45$, де $|c|=1$, $\beta = 0^\circ$ (при тому ж азимут поляризації $\alpha = \mp \frac{\Delta}{2}$).

Методика експерименту

Експеримент з формування комбінованих сингулярних пучків за допомогою змішання поляризаційно-ортогональних мод LG_0^1 і, LG_1^1 і, тестування поляризаційної структури таких пучків виконаний в схемі інтерферометра Маха-Цендера, показаної на рис. 3. 13

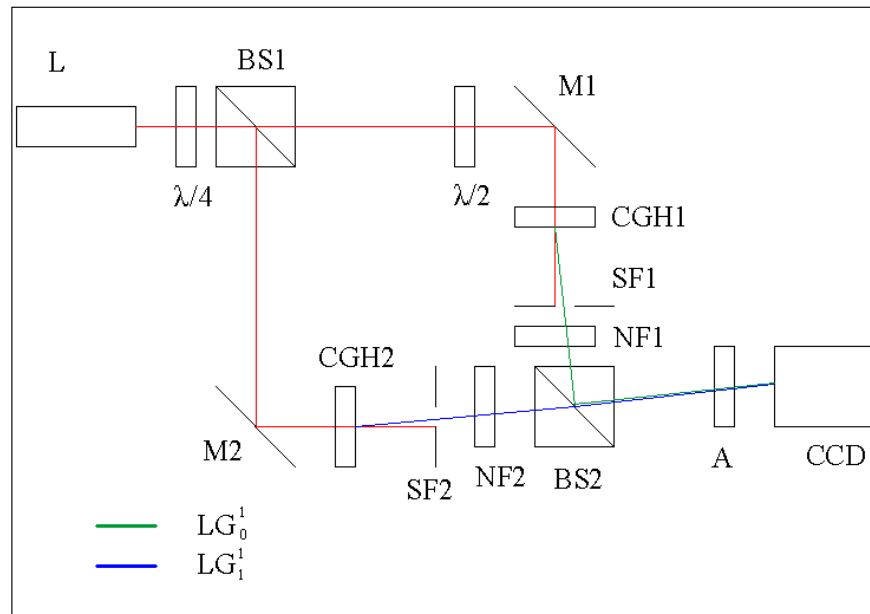


Рисунок 3.13. Експериментальна схема:

L - гелій-неоновий лазер,

BS1, BS2 - світлоділильні кубики,

CGH1, CGH2 - синтезовані голограми для отримання мод і відповідно,

SF1, SF2 - діафрагми,

NF1, NF2 - нейтральні фільтри,

M1, M2 - дзеркала,

A - лінійний або циркулярний поляризаційний аналізатор,

CCD - ПЗС-камера,

$\lambda / 4, \lambda / 2$ - чверть- і півхвильова пластинка,

Гелій-неоновий лазер L випромінює лінійно (вертикально) поляризований пучок LG_0^0 з $\lambda = 0,6328$ мкм, потужністю 2 мВт, ширина площині перетяжки $2\omega_0 = 1,6$ мм, релеєвська довжина $z_R = 3,177$ м.

При таких параметрах пучка на відстані $z = 1$ м від площини перетяжки радіус кривизни хвильового фронту становить $R \approx 11$ м, а $2w_z = 1.677$ мм.

Світлоділильник BS1 розділяє первинний пучок на два рівносильних пучка. В плечах інтерферометра розташовуються поза осьові синтезовані голограми CGH1 і CGH2, розраховані для отримання мод LG_0^1 і LG_1^1 в перших дифракційних порядках.

Стан поляризації мод, змішуються на світлороздільному кубіку BS2, задаються наступним чином. На вході інтерферометра встановлюється платівка $\lambda/4$. Якщо яка-небудь вісь цієї платівки збігається з азимутом поляризації лазерного пучка, то обидві голограми висвітлюються однаковим лінійно поляризованим пучком. Поляризаційна ортогональність мод забезпечується платівкою $\lambda/2$, осі якої становлять кути $\pm 45^\circ$ щодо азимута поляризації лазерного пучка. Якщо яка-небудь вісь платівки $\lambda/4$ складає кут 45° з азимутом поляризації лазерного пучка, то пучок на вході інтерферометра поляризований циркулярно. Баланс інтегральних потужностей змішуються мод LG_0^1 і LG_1^1 1: 0,45 забезпечується використанням нейтральних послаблювачів NF1 і NF2. Для вимірювання просторового розподілу інтенсивності в пучку використовується А - сукупність лінійний аналізатора з платівкою $\lambda/4$. Для реєстрації експериментальних результатів використовується CCD з непрозорим екраном шириною 1 мм, розташованим симетрично центру пучка. Використання ПЗС-матриці дозволяє отримати точний результат вимірювань параметрів Стокса, при цьому з використанням спеціального програмного забезпечення, проаналізувати стану поляризації світлового пучка.

Висновок

Згідно [57] структура кільцевих поляризаційних сингулярностей до турбулентних збурень, що вносяться на трасі поширення комбінованого пучка, є стійкою, оскільки реалізується принцип однакових спотворень компонент пучка, так що відношення амплітуд і фаз парціальних Лагерр-Гаусових мод, що визначає стан поляризації комбінованого пучка, в кожній точці залишається незмінним. Таким чином, поляризаційна структура комбінованого пучка виявляється стабільною, незважаючи на фазові спотворення кожної з його компонент.

Цей принцип може бути реалізований при кодуванні і передачі інформації по волоконно-оптичних лініях зв'язку.

Базовим завданням при цьому є кодування даних і аутентифікація відправника. Це легко виконати, якщо як відправник, так і одержувач мають псевдовипадкові послідовності біт (ключі). Перед початком обміну даних відправник і одержувач повинен отримати ключ, причому цю процедуру слід виконати з найвищим рівнем конфіденційності.

Процес кодування даних може бути реалізований на базі технології QKD (Quantum Key Distribution) протоколу BB84. При передачі даних контролюється поляризація випромінювання. Поляризація може бути ортогональною (горизонтальною або вертикальною), циркулярною (лівої чи правої) і діагональною (45° або 135°). Вимірювання одного виду поляризації рендомізує іншу складову. Таким чином, якщо відправник і одержувач не домовилися між собою, який вид поляризації брати за основу, одержувач може зруйнувати посланий відправником сигнал, не отримавши ніякої корисної інформації.

У випадку встановлення та зчитування позавісевої голограми (рис.3.1 а,в) в лазерний пучок з квазірівномірним розподілом амплітуди у перших порядках дифракції відновлюється відповідна мода. В +1 порядку відновлюється мода с зарядом +1, а у -1 порядку - із зарядом -1. Цей факт

протилежності "закруток" хвильового фронту у протилежних порядках дифракції вже можна використати для кодування та передачі інформації.

Осьові голограми (рис.3.1,б,г) використовуються для створення модового складу вздовж оптичної вісі.

Відправник кодує відправляються дані, задаючи певні поляризаційні стану, одержувач реєструє ці стани. Потім одержувач і відправник спільно обговорюють результати спостережень. В кінцевому підсумку з як завгодно високою вірогідністю можна бути впевненим, що передана і прийнята кодові послідовності тотожні. Обговорення результатів стосується помилок, внесених шумами або зловмисником, і ні в найменшій мірі не розкриває вмісту надісланого повідомлення. Може обговорюватися парність повідомлення, але не окремі біти.

Лазерне випромінювання фільтрується, поляризується і формується у вигляді коротких імпульсів малої інтенсивності. Поляризація кожного імпульсу модулюється відправником довільним чином відповідно до одного з чотирьох перерахованих станів (горизонтальна, вертикальна, ліво-або право-циркулярна).

Одержувач вимірює поляризацію, використовуючи довільну послідовність базових станів (ортогональна або циркулярна). Одержувач відкрито повідомляє відправнику, яку послідовність базових станів він використовував. Відправник відкрито повідомляє отримувача про те, які базові стани використані конкретно. Всі вимірювання, виконані при невірних базових станах, відкидаються. Вимірювання інтерпретуються згідно двійковій схемою:

- ліво-циркулярна поляризація або горизонтальна - 0,
- право-циркулярна або вертикальна - 1.

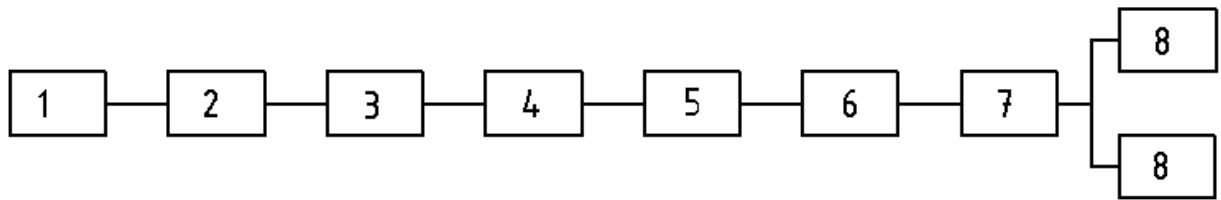


Рисунок 3.14. Схема реалізації

1 - Джерело випромінювання, 2 - оптична система, 3 - поляризатор, 4 - осередок Покельса, 5 - канал передачі даних, 6 - осередок Покельса, 7 - кальцитна призма, 8 – ФЕУ

Схема реалізація односпрямованого каналу показана на рис.3.14. Осередки Покельса служать для імпульсної варіації поляризації потоку передавачем і для аналізу імпульсів поляризації приймачем. Передавач може формувати одне з чотирьох станів поляризації (0, 45, 90 і 135 градусів). Власне передані дані надходять у вигляді керуючих сигналів на ці осередки. В якості носія даних може використовуватися оптичне волокно. В якості первинного джерела світла можна використовувати лазер. На приймаючій стороні після осередка Покельса ставиться кальцитна призма, яка розщеплює пучок на два фотодетектора (ФЕУ), що вимірюють дві ортогональні складові поляризації.

В алгоритмі В92 приймач і передавач створюють систему, що базується на інтерферометрах Маха-Цендера. Відправник визначає кути фазового зсуву, відповідні логічному нулю і одиниці ($\Phi_A = \pi / 2$), а приймач задає свої фазові зрушення для логічного нуля ($\Phi_B = 3\pi / 2$) і одиниці ($\Phi_B = \pi$).

Розділ 4 Розробка стартап-проекту «HOLO VS»

4.1. Опис ідеї проекту

Продукт включає в себе розробку математичної моделі та подальшої її реалізації у фізичному вигляді. Кінцевий результат являє собою аподизовану синтезовану голограму.

Таблиця 4.1. Опис ідеї стартап-проекту

<i>Зміст ідеї</i>	<i>Напрямки застосування</i>	<i>Вигоди для користувача</i>
Розробка математичної моделі яку можливо застосувати для розробки аподизованої синтезованої голограми	1. Передача інформації	Збільшення швидкості передачі інформації
	2. Кодування інформації	Розширення можливостей кодування
	3. Криптографія	Спрощене та більш економічне використання
	4. Оптичний пінцет	Збільшення якості зображення

Висновок: найперспективнішим напрямком є передача інформації, адже цей продукт може збільшити можливості комунікацій, а потреба в ньому тільки зростає. Також, основними перевагами є те, що наш продукт забезпечує більшу якість при нижчій експлуатаційній ціні.

Визначений перелік слабких, сильних та нейтральних техніко-економічних характеристик (чим відрізняється від існуючих аналогів та замінників) та властивостей ідеї потенційного товару є підґрунтям для формування його конкурентоспроможності.

Аналіз потенційних техніко-економічних переваг ідеї порівняно із пропозиціями конкурентів наведено в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2. Визначення сильних, слабких характеристик ідеї проекту

№ п/п	Техніко- економічні характеристики ідеї	(потенційні) товари/концепції конкурентів			W (слабка сторона)	N (нейтральна сторона)	S (сильна сторона)
		Мій проект	Славич	Хімстатус			
1.	Збільшення швидкості передачі інформації	Використовується нова математична модель	Стара математична модель	Стара математична модель			✓
2.	Розширення можливостей кодування інформації	Використання сучасних апаратних ресурсів	Застарілі апаратні ресурси	Застарілі апаратні ресурси			✓
3.	Ціна	Використовується технологія реалізації голографічних пластинок	Використовується технологія реалізації голографічних пластинок	Використовується технологія реалізації голографічних пластинок		✓	
4.	Розмір початкового капіталовкладень	Закупівля сучасного обладнання та автоматизація виробництва	Застаріле обладнання та упор на людський ресурс	Відпрацьована система використання застарілих апаратних ресурсів	✓		
5.	Спрощене та більш економічне використання	Відсутні вимоги для лазерів окрім потужності	Чіткі вимоги до лазерів	Чіткі вимоги до лазерів			✓
6.	Збільшення якості зображення	Використовується новий тип голограм	Застарілі голограми	Застарілі голограми			✓

Висновок: з таблиці видно, що купівля продукту не відрізняється від конкурентів, однак, в перспективі, буде більш економічною та надасть низку переваг користувачеві порівняно з конкурентами.

4.2. Технологічний аудит ідеї проекту

В таблиці 4.3 проводиться аудит технології, за допомогою якої можна реалізувати ідею проекту.

Таблиця 4.3. Технологічна здійсненність ідеї проекту

№ п/п	Ідея проекту	Технології її реалізації	Наявність технологій	Доступність технологій
1	Розробка математичної моделі яку можливо застосувати для	Математична модель для забезпечення стійкої сингулярності. І на основі неї реалізація голографічної пластинки	Існуюча технологія (патент)	Доступна технологія
2	розробки аподизованої синтезованої голограми	На основі купленої моделі зробити голографічну пластинку	Існуюча технологія (патент)	Недоступна технологія
Обрана технологія реалізації ідеї проекту: «Математична модель для забезпечення стійкої сингулярності. І на основі неї реалізація голографічної пластинки»				

Висновок: з таблиці 4.3. обрано пункт 1. Так як, ця технологія є доступною, не лише через фінансові перешкоди, а й через можливі проблеми з погано знайомою розробкою інших авторів.

4.3. Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту

Проведемо аналіз попиту: наявність попиту, обсяг, динаміка розвитку ринку (табл. 4.4.).

Таблиця 4.4. Попередня характеристика потенційного ринку стартап-проекту

№ п/п	Показники стану ринку (найменування)	Характеристика
1	Кількість головних гравців, од	7
2	Загальний обсяг продаж, грн..	50000\$
3	Динаміка ринку (якісна оцінка)	Зростає
4	Наявність обмежень для входу (вказати характер обмежень)	Висока конкуренція
5	Специфічні вимоги до стандартизації та сертифікації	ISO 17901-1, ISO 17901-2
6	Середня норма рентабельності в галузі (або по ринку), %	25

Висновок: Коефіцієнт рентабельності не являється високим, але ринок являється перспективним так як потребує нових розробок та рішень.

Для отримання більш чіткої картини ситуації на ринку визначимо потенційні групи клієнтів (табл.4.5), їх характеристики, та формується орієнтовний перелік вимог до товару для кожної групи.

Таблиця 4.5. Характеристика потенційних клієнтів стартап-проекту

<i>№ n/n</i>	<i>Потреба, що формує ринок</i>	<i>Цільова аудиторія (цільові сегменти ринку)</i>	<i>Відмінності у поведінці різних потенційних цільових груп клієнтів</i>	<i>Вимоги споживачів до товару</i>
1	Збільшення швидкості передачі інформації	Компанії що забезпечують передачу інформації через ВОЛЗ	Надається перевага простоті моделювання голограм та їх функціональності	Висока точність, Зручність в експлуатації, Економічність в використанні
2	Збільшення якості зображення	Компанії що використовують голограми для кращої візуалізації	Надається перевага якості зображення та простоті використання	Низька ціна, Зручність в експлуатації, Висока якість зображення

Висновок: звісно, в кожного сегмента клієнтів свої потреби, і необхідно брати це на контроль. Так для одних важливіші точність, зручність і економічність в використанні, а не ціна. Але для інших клієнтів навпаки ціна може стати рішучим фактором, не зважаючи на переваги які вони отримують.

Проведемо аналіз факторів ринкового середовища, що сприяють ринковому впровадженню (табл. 4.6.) проекту, та факторів, що перешкоджають (табл. 4.7.).

Таблиця 4.6. Фактори можливостей

<i>№ n/n</i>	<i>Фактор</i>	<i>Зміст можливості</i>	<i>Можлива реакція компанії</i>
1	Кількість інформації в світі та необхідність її передавати на великі відстані	Збільшення клієнтів, та об'єму інформації, необхідність в швидкісному інтернеті	Спрощення передачі інформації та прискорення інтернету
2	Естетичні потреби населення	Візуалізація будь-чого	Нові можливості для реклами

Висновок: як видно з таблиці головними факторами для поліпшення становища кожного сегменту ринку являється поява нових можливостей, що покращать характеристики та дадуть нові можливості.

Таблиця 4.7. Фактори загроз

№ п/п	Фактор	Зміст загрози	Можлива реакція компанії
1	Ріст конкурентів	Ріст конкурентно-спроможних фірм	Покращення характеристик продуктів, випуск нових конкурентно-спроможних продуктів
2	Насичення ринку	Цілком можливо, що об'єм інформації просто вичерпає свої можливості і потреби	Зменшення кількості випуску продукту

Висновок: фактори загроз цілком можливі та в них можливість зашкодити успіхам нашої компанії. Але знаючи про них ми можемо використати їх задля послаблення їх впливу на наш проект.

Надалі проведемо аналіз пропозиції (табл. 4.8.), де визначимо загальні риси конкуренції на ринку.

Таблиця 4.8. Ступеневий аналіз конкуренції на ринку

Особливості конкурентного середовища	В чому проявляється дана характеристика	Вплив на діяльність підприємства (можливі дії компанії, щоб бути конкурентоспроможною)
1. Тип конкуренції Олігополія	На ринку існує не багато фірм які випускають продукцію даного типу, оскільки ринок є специфічним.	Потрібно працювати над репутацією компанії, забезпечуючи високу якість продукту, реклама.
2. За рівнем конкурентної боротьби національний	Замовниками таких товарів є фірми з різних куточків світу. Доставка товару не відіграє велику роль в цьому сегменті	Реклама за кордоном, тверда репутація
3. За галузевою ознакою внутрішньогалузева	Основною галуззю являється ВОЛЗ	Розширювати можливості використання продукту
4. Конкуренція за видами товарів: - товарно-родова	Спостерігається конкуренція між основними типами приладів чи продуктів передачі інформації	Підвищення якості та об'єму передачі інформації.
5. За характером конкурентних переваг - цінова	Сам продукт являє собою розхідний матеріал, тому ціна для нього дуже важлива	Налагодження виробничого процесу для оптимізація моделі зможе зменшити ціну на продукт
6. За інтенсивністю - марочна	Велику роль відіграє репутація компанії, що виготовляє пристрій	Збільшення кількості реклами, і завдяки нашій розробці також

Висновок: на ринку існує не багато фірм які випускають продукцію даного типу, оскільки ринок є специфічним. При цьому ціни на такий продукт порівняно не високі, але в перспективі ціна має значення. Технології, що з'явилися в останній час роблять його також й перспективним.

Після аналізу конкуренції проводиться більш детальний аналіз умов конкуренції в галузі за моделлю п'яти сил М. Портера (табл. 4.9.)

Таблиця 4.9. Аналіз конкуренції в галузі за М. Портером

<i>Складові аналізу</i>	<i>Прямі конкуренти в галузі</i>	<i>Потенційні конкуренти</i>	<i>Постачальники</i>	<i>Клієнти</i>	<i>Товари-замінники</i>
	<i>Навести перелік прямих конкурентів</i>	<i>Визначити бар'єри входження в ринок</i>	<i>Визначити фактори сили постачальників</i>	<i>Визначити фактори сили споживачів</i>	<i>Фактори загроз з боку замінників</i>
Висновки: ринок не є насиченим, але конкуренція висока, оскільки компанії які являються конкурентами мають високу репутацію. Завадою являється необхідний високий рівень капіталовкладень	Славич, Хімстатус	Висока репутація конкурентних фірм, розмір капіталовкладень та час на створення власної репутації	Зазвичай постачальники не диктують умови співпраці	Споживачі можуть бути чутливими до зміни ціни, проводять контроль якості	Замінники присутні і загроз не передбачається

На основі аналізу конкуренції, проведеного наведеного в табл. 4.9, а також із урахуванням характеристик ідеї проекту, що наведені в табл. 4.2, вимог споживачів до товару (табл. 4.5.) та факторів маркетингового середовища (табл. 4.6, 4.7) визначимо та обґрунтуємо перелік факторів конкурентоспроможності. Аналіз оформлено в табл. 4.10.

Таблиця 4.10. Обґрунтування факторів конкурентоспроможності

№ n/n	Фактор конкурентоспроможності	Обґрунтування (наведення чинників, що роблять фактор для порівняння конкурентних проектів значущим)
1	Рівень якості товару та його стабільність	Якість обумовлена математичною моделлю, що виключає людський фактор
2	Цінова політика	Ціна на прилади буде відносно нижча за продукти конкурентних підприємств
3	Готова методика виготовлення	При готовій методиці виготовлення зменшується ціна та час виготовлення
4	Репутація	У зв'язку зі специфічності даного сегменту ринку даний фактор є важливим для остаточного рішення клієнта
5	Візуалізація	Клієнту подобається бачити за що від віддає гроші

За визначеними факторами конкурентоспроможності (табл. 4.10) проводиться аналіз сильних та слабких сторін стартап-проекту (табл. 4.11).

Таблиця 4.11. Порівняльний аналіз сильних та слабких сторін «HOLO VS»

№ n/n	Фактор конкурентоспроможності	Бали 1-20	Рейтинг товарів-конкурентів у порівнянні з Славич, Хімстатус						
			-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
1	Стабільність (точність)	20							✓
2	Цінова політика	18					✓		
3	Готова методика	17				✓			
4	Репутація	15						✓	
5	Візуалізація	17					✓		

Висновок: як видно з таблиці надано перевагу таким факторам як точність та репутація, що являються головними для позитивного рішення клієнта.

Фінальним етапом ринкового аналізу можливостей впровадження проекту є складання SWOT-аналізу (матриці аналізу сильних (Strength) та слабких (Weak) сторін, загроз (Troubles) та можливостей (Opportunities), що наведено в таблиці 4.12. на основі виділених ринкових загроз та можливостей, та сильних і слабких сторін (табл. 4.11).

Таблиця 4.12. SWOT- аналіз стартап-проекту

Сильні сторони: висока якість зображення товару, економічність в використанні, розширення можливостей кодування інформації, збільшення швидкості передачі інформації	Слабкі сторони: необхідність значного початкового капіталовкладення
Можливості: кількість інформації в світі та необхідність її передавати на великі відстані, естетичні потреби населення	Загрози: ріст конкурентів, насичення ринку

Висновок: необхідно передбачати появу несприятливих умов, та слідкувати за новинками в цій галузі знань для можливої швидкої реакція та зменшення наслідків.

На основі SWOT-аналізу розробимо альтернативи ринкової поведінки (перелік заходів) для виведення стартап-проекту на ринок та орієнтовний оптимальний час їх ринкової реалізації з огляду на потенційні проекти конкурентів, що можуть бути виведені на ринок. Визначені альтернативи аналізуються з точки зору строків та ймовірності отримання ресурсів (табл. 4.13).

Таблиця 4.13. Альтернативи ринкового впровадження стартап-проекту

<i>№ n/n</i>	<i>Альтернатива (орієнтовний комплекс заходів) ринкової поведінки</i>	<i>Ймовірність отримання ресурсів</i>	<i>Строки реалізації</i>
1	Створити перші прототипи для використання в існуючих установках	Отримання ресурсів буде швидким за рахунок швидкої доставки вже готової продукції	1-2 тижні
2	Створити перші прототипи для використання в установці розробленої нами	Розробка нової установки потребує ресурсів, що не завжди легко отримати	1 місяць

Висновок: найкращою альтернативою буде використання першого пункту, завдяки використанню вже готових систем мі значно полегшим собі задачу на впровадження нашого продукту в ринок.

4.4 Розроблення ринкової стратегії проекту

Розробка ринкової стратегії першим кроком передбачає визначення стратегії охоплення ринку: опис цільових груп потенційних споживачів (табл. 4.14).

Таблиця 4.14. Вибір цільових груп потенційних споживачів

<i>№ n/n</i>	<i>Опис профілю цільової групи потенційних клієнтів</i>	<i>Готовність споживачів сприйняти продукт</i>	<i>Орієнтовний попит в межах цільової групи (сегменту)</i>	<i>Інтенсивність конкуренції в сегменті</i>	<i>Простота входу у сегмент</i>
1	Науковий	Висока	Середній	Інтенсивна	Середня складність
2	Передача інформації	Висока	Високий	Інтенсивна	Середня складність
3	Візуалізація	Висока	Середній	Не інтенсивна	Низька складність
<i>Висновок:</i> обрано цільові групи: офтальмологічні клініки, дослідницькі компанії					

Для роботи в обраних сегментах ринку необхідно сформулювати базову стратегію розвитку (табл. 4.15.).

Таблиця 4.15 Визначення базової стратегії розвитку

<i>№ n/n</i>	<i>Обрана альтернатива розвитку проекту</i>	<i>Стратегія охоплення ринку</i>	<i>Ключові конкурентоспроможні позиції відповідно до обраної альтернативи</i>	<i>Базова стратегія розвитку</i>
1	Створити перші прототипи для використання в існуючих установках	Швидке налаштування виробництва під мінливий ринок	Можливість застосування в існуючих системах передачі даних, гнучкість продукту і можливість одним методом вирішувати різні проблеми	Стратегія диференціації

Наступним кроком є вибір стратегії конкурентної поведінки (табл. 4.16).

Таблиця 4.16. Визначення базової стратегії конкурентної поведінки

<i>№ n/n</i>	<i>Чи є проект «першопрохідцем» на ринку?</i>	<i>Чи буде компанія шукати нових споживачів, або забирати існуючих у конкурентів?</i>	<i>Чи буде компанія копіювати основні характеристики товару конкурента, і які?</i>	<i>Стратегія конкурентної поведінки</i>
1	Ні	Забирати існуючих клієнтів у фірм конкурентів	Ні	Заняття конкурентної ніші

Висновок: як видно з таблиць 4.14-4.16 обрано цільовими групами дослідницькі компанії, компанії що займаються передачею інформації, що потребують стратегії диференціації, що дозволить за рахунок детального аналізу запитів, поведінки покупців шукати нових споживачів, та забирати існуючих у конкурентів.

На основі вимог споживачів з обраних сегментів до постачальника та до продукту, а також в залежності від обраної базової стратегії розвитку та стратегії конкурентної поведінки розробимо стратегію позиціонування (табл. 4.17).

Таблиця 4.17 - Визначення стратегії позиціонування

№ п/п	Вимоги до товару цільової аудиторії	Базова стратегія розвитку	Ключові конкурентоспроможні позиції власного стартап-проекту	Вибір асоціацій, які мають сформувати комплексну позицію власного проекту (три ключових)
1	Якість	Стратегія спеціалізації	Незмінна якість, гнучкість	Якість, гнучкість
2	Економічність в використанні	Стратегія диференціації	Легко обслуговувати, швидка заміна, не затратне використання	Легкість, простота в використанні
3	Ціна	Стратегія диференціації	Доступна цінова політика при високій якості.	Гнучкість, доступність, якість

Висновок: крім високої якості та низької ціни пристрій потребує легкості в обслуговуванні.

4.5 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту

Першим кроком є формування маркетингової концепції товару, який отримає споживач табл. 4.18.

Таблиця 4.18 - Визначення ключових переваг концепції потенційного товару

№ п/п	Потреба	Вигода, яку пропонує товар	Ключові переваги перед конкурентами (існуючі або такі, що потрібно створити)
1	Якість	Високі характеристики стабільності системи Простота в використанні	Висока якість за рахунок виключення людського фактору з виробництва через необхідність автоматизації моделювання.
2	Економічність	Не затратне використання	Процес експлуатації дешевше за рахунок не потрібності використання спеціального обладнання, а саме лазерів.

Висновки: вигідними сторонами товару являються високі характеристики якості та економічності, що надає перевагу даному пристрою у порівнянні з конкурентами.

Розробимо трирівневу маркетингову модель товару (табл. 4.19).

Таблиця 4.19 Опис трьох рівнів моделі товару

Рівні товару	Сутність та складові	
I. Товар за задумом	Продукт використовується під час передачі інформації, представляє собою голографічну пластинку.	
II. Товар у реальному виконанні	Властивості/характеристики	
	1. Загальна світлочутливість 2. Роздільна здатність 3. Монохроматична чутливість (SI) 4. Коефіцієнт контрастності	ISO 25 S од. не менш 90 мм-1 3-бвідносні одиниці при l = 2550 Å (255 нм) не менше 1,1
	Відповідність до ISO 17901-1, ISO 17901-2	
	Пластикові упаковка	
	Марка: «HOLO VSv.1»	
III. Товар із підкріпленням	До продажу навчання	
	Після продажу технічне обслуговування, інформаційна підтримка	
Товар буде захищено від копіювання за рахунок патенту на математичну модель		

Наступним кроком визначимо цінові межі (табл. 4.20).

Таблиця 4.20 - Визначення меж встановлення ціни

№ n/n	Рівень цін на товари-замінники	Рівень цін на товари-аналоги	Рівень доходів цільової групи споживачів	Верхня та нижня межі встановлення ціни на товар
1	1500грн	1300 грн	1000000 грн	1300-1500 грн

Висновок: як видно з таблиці, збільшити кількість клієнтів дозволить ціна на наш пристрій, що являється нижчою, ніж ціна на сучасні аналоги. Нижній рівень відповідає ціні товарів замінників, але наш пристрій є більш якісним.

Наступним кроком є визначення оптимальної системи збуту, в межах якого приймається рішення (табл. 4.21).

Таблиця 4.21 Формування системи збуту

№ n/n	Специфіка закупівельної поведінки цільових клієнтів	Функції збуту, які має виконувати постачальник товару	Глибина каналу збуту	Оптимальна система збуту
1	Попереднє замовлення з підписанням контракту	доставка в строки, контроль за уникненням пошкоджень	Прямий	Прямий

Висновок: у зв'язку з тим, що обслуговується вузький сегмент ринку тому доцільніше не використовувати посередників, а застосовувати прямий канал збуту.

Висновок

На основі проведеного аналізу можна стверджувати, що стартап-проект планується успішним. На це є декілька причин, такі як: висока якість за рахунок автоматизації виробництва товару, досконаліший ніж у конкурентів алгоритм математичного моделювання при не великій кошовності продукту, економічність в використанні через відсутність необхідності в спеціальному обладнанні. Застосування в декількох сегментах можливе і, навіть, дає нам можливість охопити більший ринок збуту.

Основні напрямки застосування можливі такі, як: передача інформації, кодування інформації, криптографія, оптичний пінцет.

Користування нашим товаром надає переваги користувачу, а саме: збільшення швидкості передачі інформації, розширення можливостей кодування інформації, збільшення якості зображення. Сама ідея проекту є інноваційною в деякій мірі, адже розробка математичної моделі, яку можливо застосувати для розробки аподизованої синтезованої голограми для отримання оптичних сингулярностей на даний момент не застосовується. А саме завдяки оптичним сингулярностям і досягається більшість наших переваг.

На ринку існує не багато фірм які випускають продукцію даного типу, оскільки ринок є специфічним. При цьому ціни на такий продукт порівняно не високі, але в перспективі ціна має значення.

Технології, що з'явилися в останній час роблять його також й перспективним. Обрано цільовими групами дослідницькі компанії, компанії що займаються передачею інформації, що потребують стратегії диференціації, що дозволить за рахунок детального аналізу запитів, поведінки покупців шукати нових споживачів, та забирати існуючих у конкурентів.

Перспективність ринку та його не насиченість дає надію на постійний попит та зростання його в майбутньому.

Звертаючи увагу на конкурентів хочу зауважити, що суттєвих причин для тривоги немає, адже наш продукт має кількісна та якісні переваги яких не мають вони. Саме тому основною проблемою для нього може бути недостатня рекламна компанія чи погана\ ніяка репутація. Ціна на ринку буде представлена нижче середньо ринкової.

Затрати на вкладення в стартап-проект вважаю достатніми в розмірі 20000 \$.

Загальні висновки

Тема магістерської дисертації обґрунтування математичної моделі та фізичної реалізації оптичної сингулярності.

Така цільова спрямованість роботи зумовила необхідність розгляду наступних моментів: спіральних пучків світла, поняття сингулярної оптики, формування сингулярних пучків за допомогою синтезованих аподизованих голограм, експериментальне дослідження поляризаційної сингулярності.

В даній роботі предметом дослідження є розробка математичної моделі та фізичну реалізацію оптичної сингулярності і на основі неї реалізація синтезованої голографічної пластинки.

Була використана теоретична і методологічна праця вітчизняних і зарубіжних вчених в області експериментальної і теоретичної фізики, оптики, матеріали науково-практичних конференцій, монографії та публікації в періодичній пресі, статистична інформація.

Наукова новизна результатів дослідження полягає в постановці, теоретичному і прикладному обґрунтуванні та вирішенні комплексу питань, пов'язаних з подальшим розвитком основ оптичної сингулярності.

Практична значимість дипломної роботи полягає в розробці конкретних рекомендацій щодо впровадження та застосування аподизованої синтезованої голограми для отримання оптичних сингулярностей. А саме, завдяки оптичній сингулярності і досягається більшість переваг.

Актуальністю даної магістерської роботи є те, що при використанні оптичної сингулярності в проектах є переваги, такі як: висока якість за рахунок автоматизації виробництва товару, досконалішій за конкурентів алгоритм математичного моделювання при невеликій кошовності продукту, економічність в використанні через відсутність необхідності в спеціальному обладнанні. Застосування в декількох сегментах можливе і, навіть, дає нам можливість охопити більший ринок збуту.

Після вивчення даної моделі, можемо підкреслити, що основні напрямки застосування можливі такі, як: передача інформації, кодування інформації, криптографія, оптичний пінцет.

В дисертації розглядається проект, який включає в себе розробку математичної моделі та подальшої її реалізації у фізичному вигляді. Кінцевий результат являє собою аподизовану синтезовану голограму математична модель для забезпечення стійкої сингулярності і на основі неї реалізація голографічної пластинки.

Користування нашим товаром надає переваги користувачу, а саме: збільшення швидкості передачі інформації, розширення можливостей кодування інформації, збільшення якості зображення. Сама ідея проекту є інноваційною в деякій мірі, адже розробка математичної моделі, яку можливо застосувати для розробки аподизованої синтезованої голограми для отримання оптичних сингулярностей на даний момент не застосовується.

Список використаної літератури:

1. E.Abramochkin and V.Volostnikov. Beam transformations and nontransformed beams. – Optics Comm., 1991, v.83, № 1–2, p.123–135.
2. E.Abramochkin and V.Volostnikov. Spiral-type beams. – Optics Comm., 1993, v.102, № 3–4, p.336–350.
3. Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. Спиральные пучки света. – Успехи физ. наук, 2004, т. 174, № 12, с. 1273–1300.
4. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Под ред. Н.Х. Розов/ Корн Г, Корн Т – М.: Наука, 1974;
5. Спиральные пучки света / Е. Г. Абрамочкин, В. Г. Волостников // Успех физических наук. — 2004. — № 12. — С. 1274-1277.
6. J. F. Nye, M. V. Berry (1974). Dislocations in wave trains. Lond. A, 336, 165-189;
7. Оптические вихри в неоднородных средах / Н.Б. Баранова, Б.Я. Зельдович // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1979 — С. 80.
8. M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // Progress in Optics. [ed by E.Wolf] – 2001.V42, Chapter 4. – P219.
9. А.В. Наумов. Спектроскопия органических молекул в твердых матрицах при низких температурах: от эффекта Шпольского к лазерной люминесцентной спектромикроскопии всех эффективно излучающих одиночных молекул. – Успехи физ. наук, 2013, т. 56, № 6, с. 633–652.
- 10.S.R.P. Pavani, R. Piestun. High-efficiency rotating point spread functions. – Optics Express., 2008, v.16, № 5, p. 3484–3489.
- 11.E.V.Razueva, E.G.Abramochkin. Fast rotating spiral light beams. – Proc. of XII Int. Workshop on Quantum Optics (IWQO-2015) (Moscow, Troitsk, August 11–16, 2015), ID 10011 (2 pp.).
- 12.Морозов, А. М. Оптические голографические приборы: уч. пособ. / А. М. Морозов, И. В. Кононов. — М.: Машиностроение, 1988. —125 с.

13. Виноградова М. Б., Руденко О. В. Сухоруков А. П. Теория волн (М.: Наука. 1990)
14. Цикон Х и др. Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии (М.: Мир. 1990)
15. Абрамочкин Е. Г. Дисс. канд. физ.-мат. наук (Самара: 60. СамГПУ, 1996)
16. Abramochkin E. Volostnikov V Op1. Commun. 102 336(1993)
17. Волостников В. Г. Дисс. докт. физ.-мат. наук (Саратов: СГУ. 1997)
18. Давыдов А. С. Квантовая механика (М.: Физматгиз, 1963)
19. Хапалюк А. П. Дисс. докт. физ.-мат. наук (Минск: БГУ, 1987)
20. Абрамочкин Е. Г. Вести. СамГУ: Естественнонаучн. сер. (4) 19 (2001)
21. Wunsche A. J. Opt. Soc. Am. A 6 1320(1989)
22. Indebetouw G. J. Mod. Opt. 40 73 (1993)
23. де Бройль Л Соотношения неопределенностей Гейзенберга и 71. вероятностная интерпретация волновой механики (М.: Мир. 1986)
24. Ананьев Ю. А. Оптические резонаторы и лазерные пучки (М.: Наука. 1990)
25. Abramochkin E. Volostnikov V Op1. Commun. 83 123(1991)
26. Джеррард А., Берч Дж М Введение в матричную оптику (М.: Мир. 1978)
27. Abramochkin E., Losevsky N, Volostnikov V Op1. Commun. 141 59 (1997)
28. Abramochkin E., Volostnikov V Op1. Commun. 125 302 (1996)
29. Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения (М.: Наука 1987)
30. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория (М.: Наука. 1989)
31. Федорюк М В Асимптотика: интегралы и ряды (М.: Наука. 1987)
32. Abramochkin E., Volostnikov V Op1. Commun. 74 144 (1989)
33. Титчмарш Е., Теория функций 2-е изд. (М.: Наука. 1980)
34. Гейлер В. А., Алгебра и анализ 3 (3) 1 (1991)

35. Bastian M J Proc. IEEE 68 538 (1980)
36. Волостников В. Г., Локтев М. Ю. Оптика и спектроск. 86 80 (1999)
37. Гончарский А. В., Попов В. В., Степанов В. В. Введение в компьютерную оптику (М.: Изд-во МГУ, 1991)
38. Воронцов М. А., Матвеев А. Н., Сивоконь В. П., в сб. Компьютерная оптика Вып. 1 (Самара: Изд-во самарского гос. аэрокосмич. университета, 1987) с. 74
39. Гончарский А. В. и др. ДАН СССР 273 605 (1983)
40. Гончарский А. В., Сисакян И. Н., Степанов В. В. ДАН СССР 279 68 (1984)
41. Gerchberg R. W., Saxton W O Optik 35 237 (1972)
42. Абрамочкин Е. Г., Волостников В. Г., в сб. Компьютерная оптика Вып. 1 (Самара: Изд-во самарского гос. аэрокосмич. университета, 1992) с. 95
43. Ярив А. квантовая электроника (М.: Сов. Радио, 1980)
44. Allen Letal. Phys. Rev. A 45 8185 (1992)
45. Soshin V Setal. Phys. Rev. A 56 4064 (1997)
46. Арнольд В. И., математические методы классической механики (М.: Наука, 1974)
47. Abramochkin E. G., Volostnikov V. G., in Intern. Conf. on Singular Optics, 5-10 October 1997, Partenit, Ukraine (Proc. SPIE, Vol. 3487, Ed. M S Soshin) (Bellingham, Wash.: SPIE, 1998) p. 20
48. Афанасьева Н. М. УФН 166 1145 (1996)
49. Дремин И. М., Иванов О. В., нечитайло В. А. УФН 171 465 (2001)
50. Bogatyryova H.V., Felde Ch.V., Polyanskii P.V., Ponomarenko S.A., Soskin M.S., Wolf E. Partially coherent vortex beams with a separable phase // Optics Letters. – 2003. – V.28, No. 5. – P. 878-880.
51. Felde Ch.V. Young's diagnostics of phase singularities of the spatial coherence function at partially coherent singular beams // Ukr. J. Phys. – 2004. – Vol. 49, No. 5. – P. 473-480.

52. Born M., Wolf E. Principles of Optics, 7th ed. – New York: Pergamon, 1999.
53. Богатырева Г.В., Фельде К.В., Полянский П.В., Соскин М.С. Нетипичные поляризационные сингулярности в комбинированных вихревых пучках // Оптика и спектроскопия. – 2004. – Т. 97, № 5. – С. 833-840.
54. Полянський П.В. Нелінійно-голографічна пам'ять фазового спряження: Дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.04.05. – Чернівці, 2000. – 361 с.
55. Полянский П.В., Фельде К.В. Статико-голографическое фазовое сопряжение вихревых пучков // Оптика и спектроскопия. – 2005. – Т. 98, № 6. – С. 913-918.
56. Soskin M.S., Vasnetsov M.V. Singular optics // Progress in Optics / Ed. by E. Wolf. – Amsterdam: Elsevier, 2001. – V. 42. – P. 219-267.
57. Bogatyryova H.V., Felde Ch.V., Polyanskii P.V. // Optica Applicata. – 2003. – V. 33, No. 4. – P. 695-708.

Додаток А

$$k := 2 \cdot \frac{\pi}{\lambda} \qquad \lambda := 0.6823 \cdot 10^{-3}$$

$$zR := k \cdot \frac{w0^2}{2} \qquad w0 := 1$$

$$zR = 4.604 \times 10^3$$

$$z := 0.01 \cdot zR \qquad z = 46.044$$

$$w := w0 \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{zR^2}} \right) \qquad w = 1$$

$$\textcolor{green}{R} := z \cdot \left(1 + \frac{zR^2}{z^2} \right) \qquad R = 4.605 \times 10^5$$

$$E0 := 0.4$$

$$L1l(r) := 2 - 2 \cdot \frac{r^2}{w^2} \qquad L0l(r) := 1 \qquad L0\textcolor{teal}{l}(r) := 1$$

$$E1l(r) := Es \cdot \frac{r \cdot \sqrt{2} \cdot L1l(r) \cdot e^{\frac{-r^2}{w^2}}}{w}$$

$$E0l(r) := 1.97 Es \cdot \frac{r \cdot \sqrt{2} \cdot L0l(r) \cdot e^{\frac{-r^2}{w^2}}}{w}$$

$$E02(r) := Es \cdot \frac{2 \cdot r^2 \cdot L0\textcolor{teal}{l}(r) \cdot e^{\frac{-r^2}{w^2}}}{w^2}$$

$$I0l(r) := E0l(r)^2 \qquad I1l(r) := E1l(r)^2$$

$$S0l := \left(\int_{-10}^{10} I0l(r) \, dr \right) \qquad S1l := \left(\int_{-10}^{10} I1l(r) \, dr \right)$$

$$S0l = 2.432 \qquad S1l = 1.097$$

$$\frac{S1l}{S0l} = 0.451$$

$$n := 1..300 \qquad \textcolor{green}{m} := 1..300$$

$$x_n := 0.015n - 1.49 \qquad y_m := 0.015m - 1.5$$

$$\rho_{n,m} := \left(x_n \right)^2 + \left(y_m \right)^2 \qquad \phi_{n,m} := \arg \left(x_n - i \cdot y_m \right) \qquad \gamma := 1.5$$

$$\Delta\Phi(\rho,\phi) := \phi - 4\cdot\text{atan}\left(\frac{z}{zR}\right) + k\cdot\frac{\rho^2}{2\cdot150} + \frac{k\cdot\rho^2}{2\cdot R}$$

$$\Delta\Phi1(\rho,\phi) := \phi - k\cdot\rho\cdot\sin(\gamma)\cdot\cos(\phi) + 2\cdot k\cdot z\cdot\left(\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)^2 - 4\cdot\text{atan}\left(\frac{z}{zR}\right) + 0 + \frac{k\cdot\rho^2}{2\cdot R}$$

$$\textcolor{green}{E11}_{n,m} := E11\left(\sqrt{\rho_{n,m}}\right) \quad \textcolor{green}{I11}_{n,m} := \left(E11_{n,m}\right)^2$$

$$\textcolor{green}{\Delta\Phi}_{n,m} := \Delta\Phi\left(\sqrt{\rho_{n,m}},\phi_{n,m}\right) \quad \textcolor{green}{\Delta\Phi1}_{n,m} := \Delta\Phi1\left(\sqrt{\rho_{n,m}},\phi_{n,m}\right)$$

$$I_{n,m} := E0^2 + I11_{n,m} + 2\cdot E0\cdot E11_{n,m}\cdot\left(\cos\left(\Delta\Phi_{n,m}\right)\right)$$

$$\textcolor{green}{I1}_{n,m} := E0^2 + I11_{n,m} + 2\cdot E0\cdot E11_{n,m}\cdot\left(\cos\left(\Delta\Phi1_{n,m}\right)\right)$$

$$\Delta\Psi(\rho,\phi) := \phi - 2\cdot\text{atan}\left(\frac{z}{zR}\right) + k\cdot\frac{\rho^2}{2\cdot150} + \frac{k\cdot\rho^2}{2\cdot R}$$

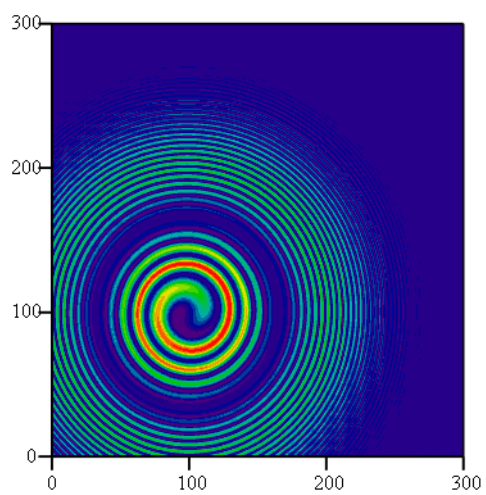
$$\Delta\Psi1(\rho,\phi) := \phi - k\cdot\rho\cdot\sin(\gamma)\cdot\cos(\phi) + 2\cdot k\cdot z\cdot\left(\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)^2 - 2\cdot\text{atan}\left(\frac{z}{zR}\right) + 0 + \frac{k\cdot\rho^2}{2\cdot R}$$

$$\textcolor{green}{E01}_{n,m} := E01\left(\sqrt{\rho_{n,m}}\right) \quad \textcolor{green}{I01}_{n,m} := \left(E01_{n,m}\right)^2$$

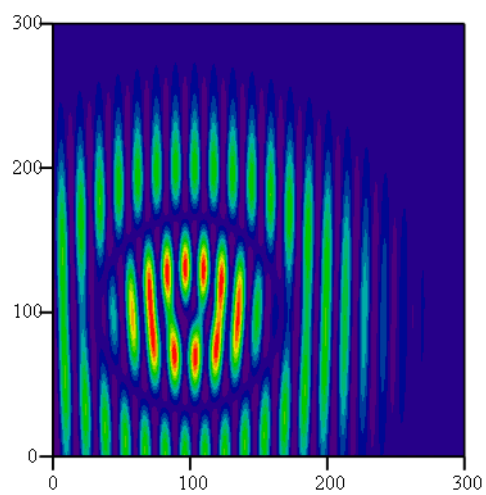
$$\textcolor{green}{\Delta\Psi}_{n,m} := \Delta\Psi\left(\sqrt{\rho_{n,m}},\phi_{n,m}\right) \quad \textcolor{green}{\Delta\Psi1}_{n,m} := \Delta\Psi1\left(\sqrt{\rho_{n,m}},\phi_{n,m}\right)$$

$$I_{n,m} := E0^2 + I01_{n,m} + 2\cdot E0\cdot E01_{n,m}\cdot\left(\cos\left(\Delta\Psi_{n,m}\right)\right)$$

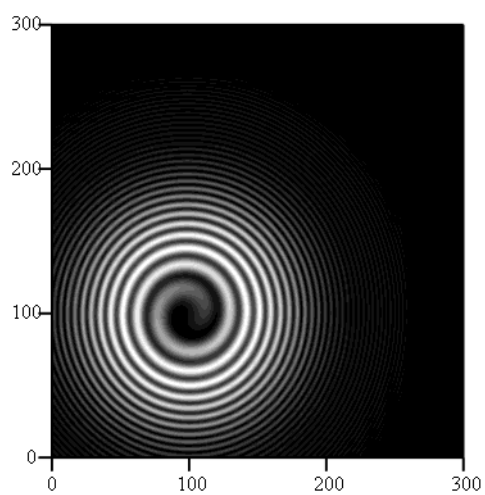
$$I_{n,m}1 := E0^2 + I01_{n,m} + 2\cdot E0\cdot E01_{n,m}\cdot\left(\cos\left(\Delta\Psi1_{n,m}\right)\right)$$



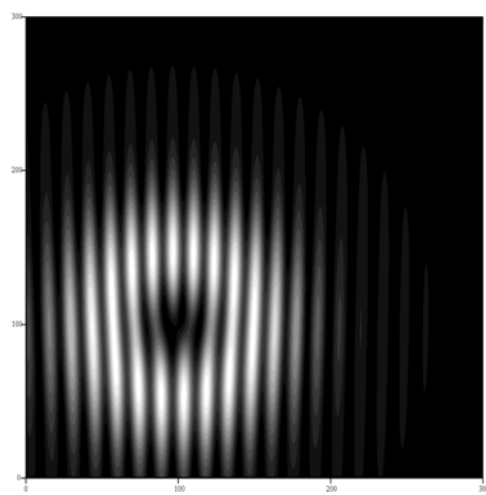
I



II



IN



IN1

Додаток Б

$$\begin{aligned} E010 &:= 1 \\ w &:= 1 \\ L01(r) &:= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E110 &:= 1 \\ v &:= 1 \end{aligned}$$

$$L11(r) := 2 - 2 \cdot \frac{r^2}{2}$$

$$E01(r) := E010 \cdot \frac{r \cdot \sqrt{2} \cdot L01(r) \cdot e^{-\frac{r^2}{w^2}}}{w}$$

$$E11(r) := E110 \cdot \frac{r \cdot \sqrt{2} \cdot L11(r) \cdot e^{-\frac{r^2}{v^2}}}{v}$$

распределение амплитуд

$$I01(r) := E01(r)^2$$

$$S01 := \left(\int_{-10}^{10} I01(r) \, dr \right)$$

$$S01 = 0.627$$

$$\frac{S11}{S01} = 0.45$$

$$I11(r) := (E11(r))^2$$

$$S11 := 0.257 \cdot \left(\int_{-10}^{10} I11(r) \, dr \right)$$

$$S11 = 0.282$$

$$n := 0 \dots 100$$

$$m := 0 \dots 100$$

$$z_n := 0.04 \cdot n$$

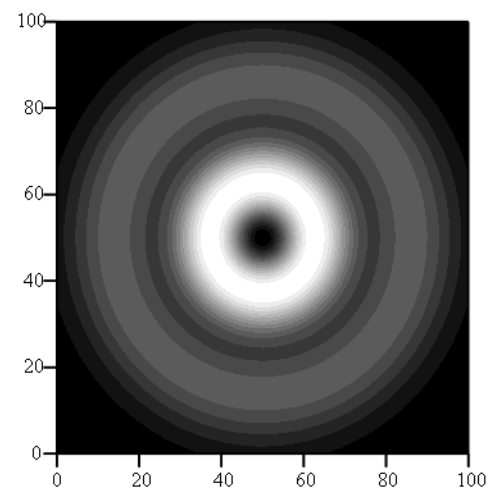
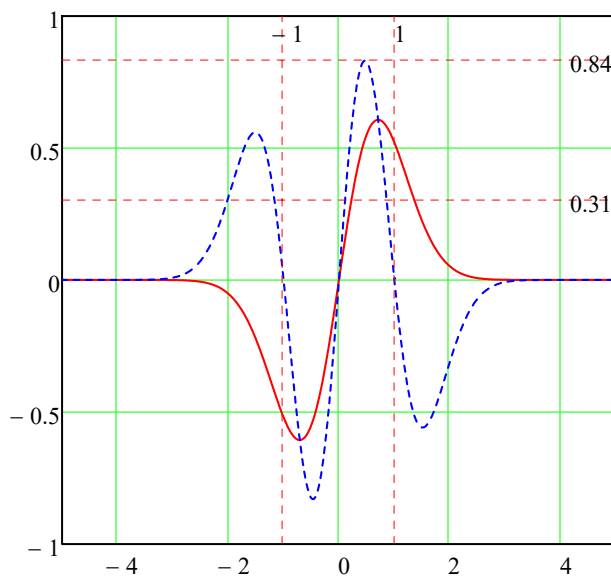
$$y_m := 0.04 \cdot m$$

$$\rho_{n,m} := (z_n - 2)^2 + (y_m - 2)^2$$

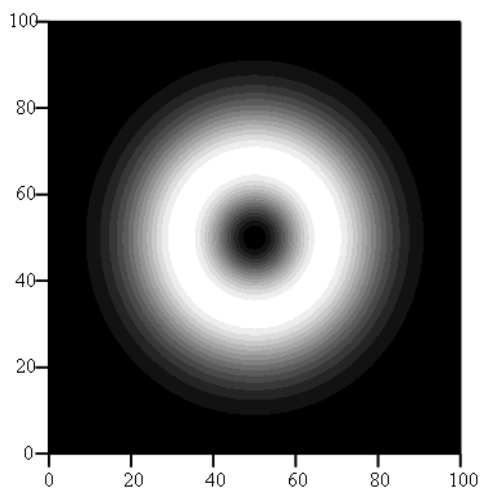
$$I01_{n,m} := I01(\sqrt{\rho_{n,m}})$$

$$I11_{n,m} := I11(\sqrt{\rho_{n,m}})$$

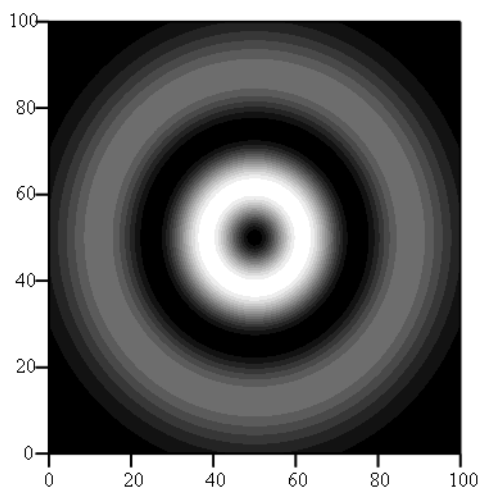
$$II := I01 + I11$$



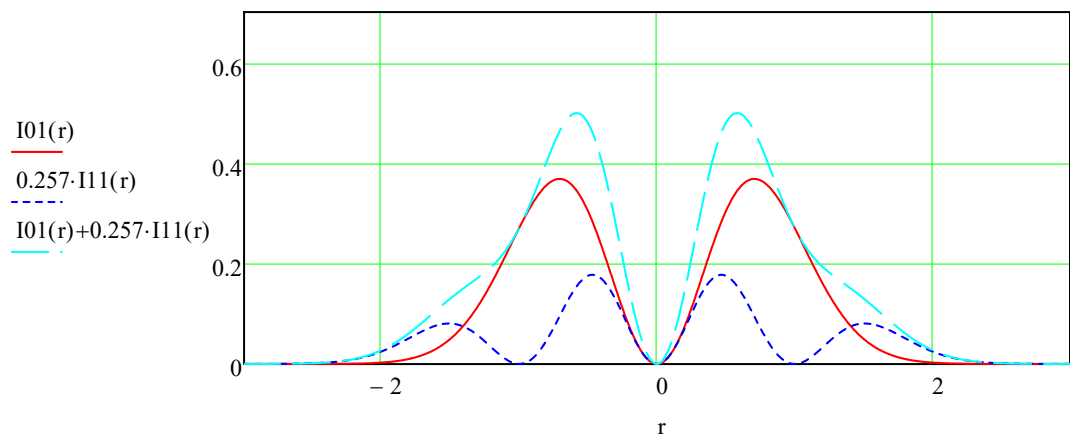
II



II01



II11



$i := 0..60$ $d := 0.4$

$D := 0.8$

chirina ekrana

$$\underline{\underline{R_i}} := -1.5 + 0.05 \cdot i$$

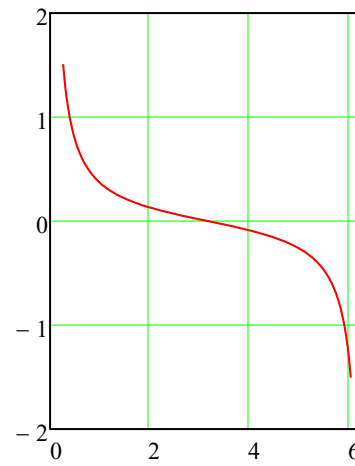
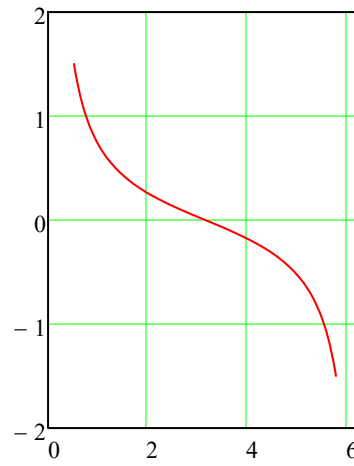
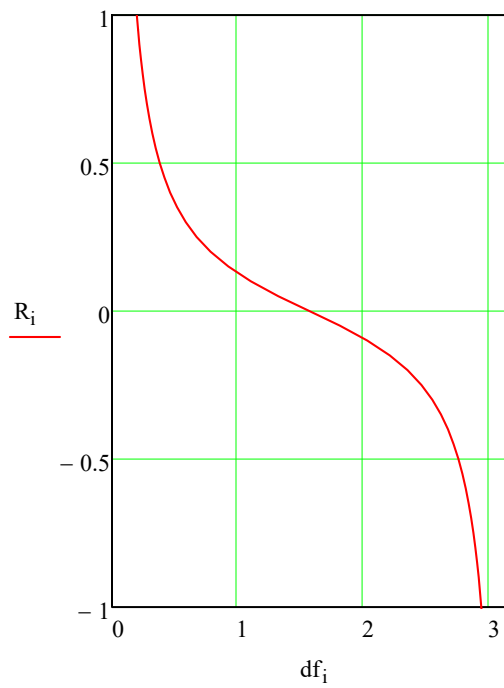
$$\underline{\underline{K_i}} := -1.5 + 0.05 \cdot i$$

$$df_i := \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot R_i}{d}\right)$$

$$dh_i := \pi - 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot K_i}{D}\right)$$

$$dg_i := \pi - 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot K_i}{d}\right)$$

$$\underline{\underline{A}} := 0.3 \quad B := 0.3$$



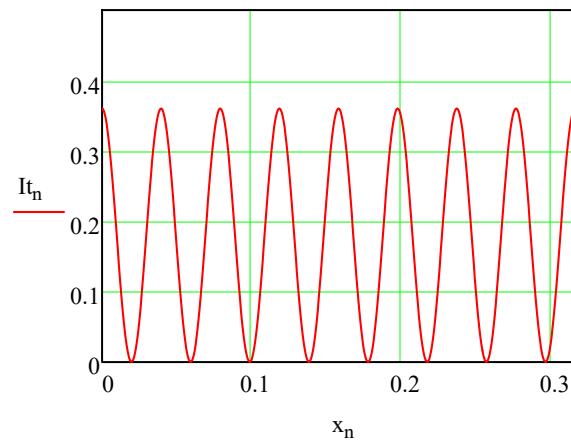
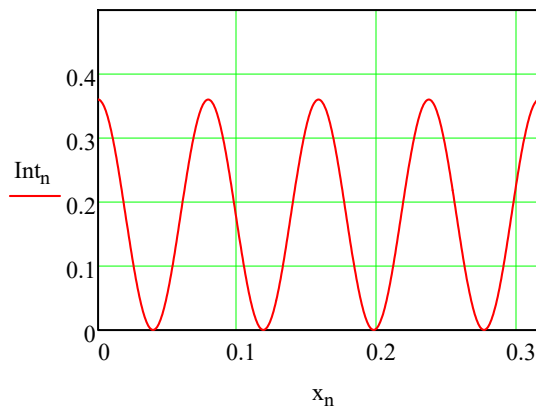
$$n := 0 \dots 500$$

$$\lambda := 0.6328 \cdot 10^{-3}$$

$$x_n := \lambda \cdot 1 \cdot n$$

$$Int_n := 4 \cdot A \cdot B \cdot \left(\cos \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot d \cdot x_n}{\lambda \cdot 100} \right) \right)^2$$

$$It_n := 4 \cdot A \cdot B \cdot \left(\cos \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot D \cdot x_n}{\lambda \cdot 100} \right) \right)^2$$



$$r_i := \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (R_i)^2}$$

$$AA_{n,i} := \text{Int}_n$$

$$DD_{n,i} := \text{It}_n$$

$$AB_{n,i} := 4 \cdot \text{I01}(r_i) \cdot \left[\cos \left[df_i + \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot d \cdot x_n}{\lambda \cdot 100} \right) \right] \right]^2$$

$$BA_{n,i} := 4 \cdot A \cdot B \cdot \left(\cos \left(dh_i + \frac{2 \cdot \pi \cdot D \cdot x_n}{\lambda \cdot 100} \right) \right)^2$$

$$DA_{n,i} := 4 \cdot A \cdot B \cdot \left(\cos \left(dg_i + \frac{2 \cdot \pi \cdot d \cdot x_n}{\lambda \cdot 100} \right) \right)^2$$

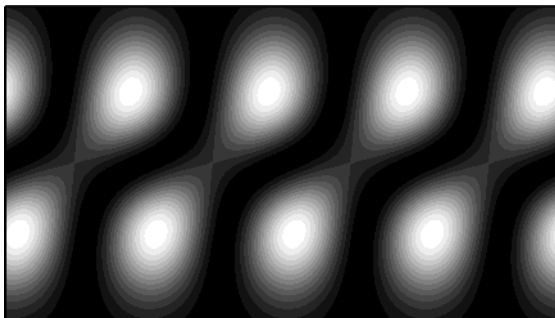
$$AAA_{n,i} := AB_{n,i} \cdot AA_{n,i} \quad BBB := AB + AA$$

raspredelenie intensivnosti za ekranom
c opornoj volnoi

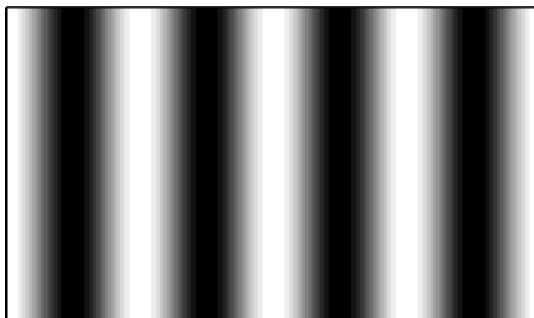
raspredelenie intensivnosti za ekranom c
modoi LG01

fazovaja struktura za ekranom c
modoj LG02 (dlja chiriny ekrana
0.8)

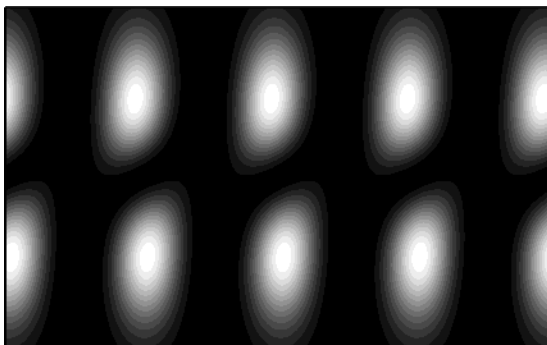
fazovaja struktura za ekranom c
modoj LG02 (dlja chiriny ekrana
0.4)



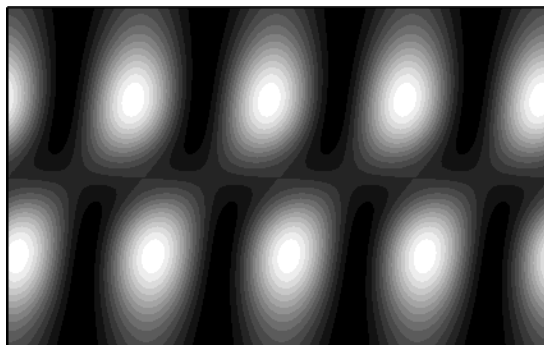
AB



AA



AAA



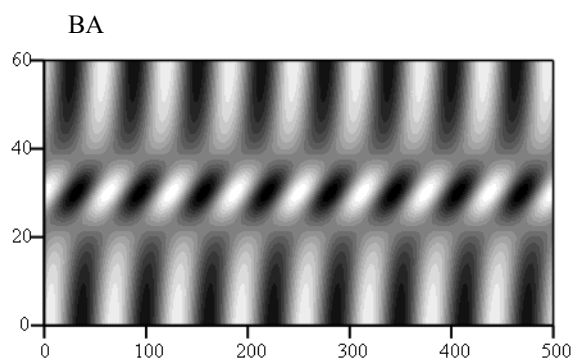
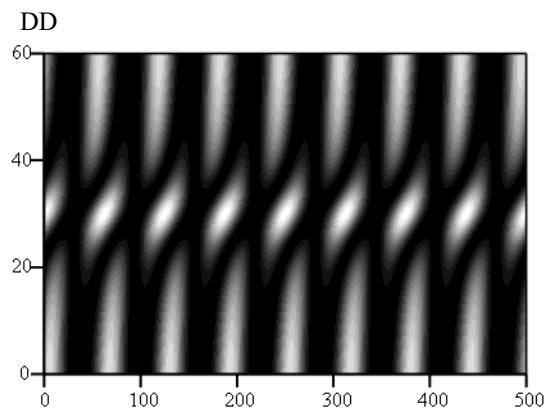
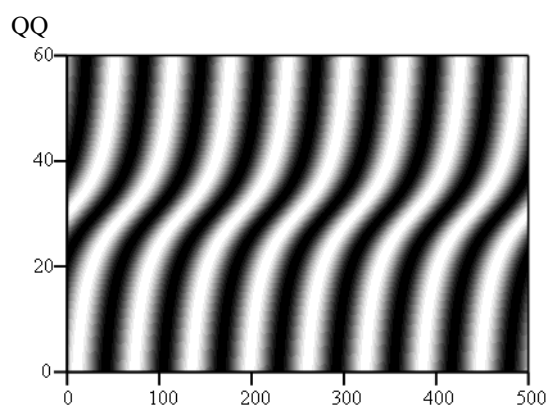
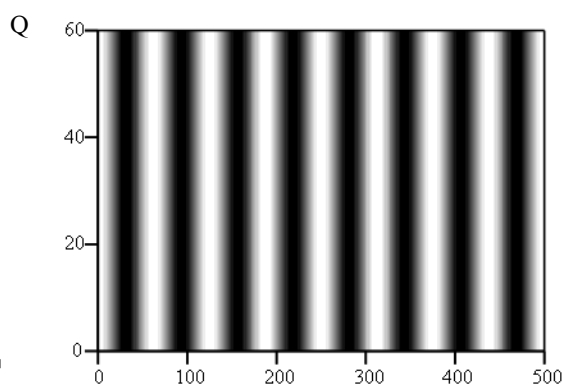
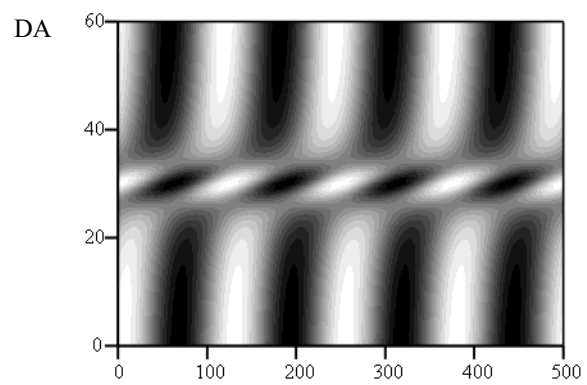
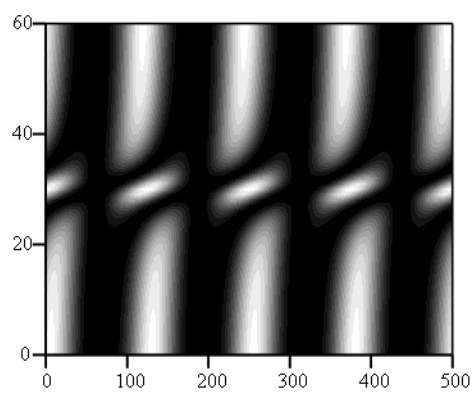
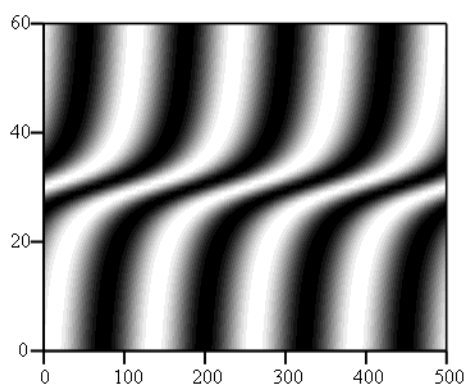
BBB

$$Q_{n,i} := DA_{n,i} \cdot AA_{n,i}$$

$$QQ_{n,i} := DA_{n,i} + AA_{n,i}$$

$$QD_{n,i} := BA_{n,i} \cdot DD_{n,i}$$

$$QQD_{n,i} := BA_{n,i} + DD_{n,i}$$



QD

QQD